# W. R. HAMILTON KVATERNIÓI ÉS AZ ÁLTALÁNOSÍTOTT VEKTORGEOMETRIA MEGSZÜLETÉSE

**Péntek Kálmán**

Eötvös Loránd Tudományegyetem, SEK
Berzsenyi Dániel Pedagógusképző Központ,
Matematika Tanszék, 9700 Szombathely, Károlyi Gáspár tér 4.

## 1. **Klasszikus Kvaterniók** (W. R. Hamilton, 1843)

$$\mathbb{H} := \{a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

Kvaternió egységek: $1, i, j, k$

$$i^2 = -1, \qquad j^2 = -1, \qquad k^2 = -1$$

$$i \cdot j = -j \cdot i = k, \qquad j \cdot k = -k \cdot j = i, \qquad k \cdot i = -i \cdot k = j$$

Műveletek:

(1) skalárral való szorzás:

$$r \cdot (a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k) = (r \cdot a) + (r \cdot b) \cdot i + (r \cdot c) \cdot j + (r \cdot d) \cdot k$$

(2) összeadás:

$$(a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k) + (a' + b' \cdot i + c' \cdot j + d' \cdot k) =$$
$$= (a + a') + (b + b') \cdot i + (c + c') \cdot j + (d + d') \cdot k$$

(3) szorzás:

$$(a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k) \cdot (a' + b' \cdot i + c' \cdot j + d' \cdot k) =$$

$$= (a \cdot a' - b \cdot b' - c \cdot c' - d \cdot d') + (a \cdot b' + b \cdot a' + c \cdot d' - d \cdot c') \cdot i$$
$$+ (a \cdot c' - b \cdot d' + c \cdot a' + d \cdot b') \cdot j + (a \cdot d' + b \cdot c' - c \cdot b' + d \cdot a') \cdot k$$

T: $\mathbb{H}$ az (1) – (3) műveletekkel egy 4-dimenziós, nem kommutatív, de asszociatív és neutrális elemes algebrát alkot az $\mathbb{R}$ test felett.

A $q = a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k \in \mathbb{H}$ kvaternió *valós részén* (skalár rész) az $S(q) = a \in \mathbb{R}$ számot, *képzetes részén* (vektor rész) a $V(q) = b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k \in \mathbb{R}^3$ vektort értjük.

Ha $q = b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k, q' = b' \cdot i + c' \cdot j + d' \cdot k \in \mathbb{H}$ két tiszta képzetes kvaternió, akkor szorzatukra

$$q \cdot q' = -(b \cdot b' + c \cdot c' + d \cdot d')$$
$$+ [(c \cdot d' - d \cdot c') \cdot i + (d \cdot b' - b \cdot d') \cdot j + (b \cdot c' - c \cdot b') \cdot k]$$

adódik.

E két kvaternió *skaláris szorzatán* a $q \circ q' := b \cdot b' + c \cdot c' + d \cdot d' \in \mathbb{R}$ skalárt értjük.

E két kvaternió *vektoriális szorzatán* pedig a $q \times q' := (c \cdot d' - d \cdot c') \cdot i +$

$+(d \cdot b' - b \cdot d') \cdot j + (b \cdot c' - c \cdot b') \cdot k \in \mathbb{R}^3$ vektort értjük.

Ekkor tehát $q \cdot q' = -(q \circ q') + (q \times q')$ teljesül.

T: A tiszta képzetes kvaterniók halmaza a skalárral való szorzással és az összeadással vektorteret, a skaláris szorzással együtt azonban $E^3$ euklideszi vektorteret alkot az $\mathbb{R}$ test felett.

**2. Általánosított Kvaterniók** (L.E. Dickson, 1912)

$$\mathbb{H}_{\alpha\beta} := \{a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

Általánosított kvaternió egységek: $1, i, j, k$

$$i^2 = -\alpha, \qquad j^2 = -\beta, \qquad k^2 = -\alpha \cdot \beta$$

$$i \cdot j = -j \cdot i = k, \qquad j \cdot k = -k \cdot j = \beta \cdot i, \qquad k \cdot i = -i \cdot k = \alpha \cdot j$$

Műveletek:

(4) skalárral való szorzás:

$$r \cdot (a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k) = (r \cdot a) + (r \cdot b) \cdot i + (r \cdot c) \cdot j + (r \cdot d) \cdot k$$

(5) összeadás:

$$\begin{aligned}(a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k) + (a' + b' \cdot i + c' \cdot j + d' \cdot k) = \\ = (a + a') + (b + b') \cdot i + (c + c') \cdot j + (d + d') \cdot k\end{aligned}$$

(6) szorzás:

$$\begin{aligned}(a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k) \cdot (a' + b' \cdot i + c' \cdot j + d' \cdot k) = \\ = (a \cdot a' - \alpha \cdot b \cdot b' - \beta \cdot c \cdot c' - \alpha \cdot \beta \cdot d \cdot d') \\ + (a \cdot b' + b \cdot a' + \beta \cdot c \cdot d' - \beta \cdot d \cdot c') \cdot i \\ + (a \cdot c' - \alpha \cdot b \cdot d' + c \cdot a' + \alpha \cdot d \cdot b') \cdot j \\ +(a \cdot d' + b \cdot c' - c \cdot b' + d \cdot a') \cdot k\end{aligned}$$

T: $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ a (4) – (6) műveletekkel egy 4-dimenziós, nem kommutatív, de asszociatív és neutrális elemes algebrát alkot az $\mathbb{R}$ test felett.

Speciálisan, ha $\alpha = \beta = 1$, akkor $\mathbb{H}_{\alpha\beta} = \mathbb{H}$ teljesül.

A $q = a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ általánosított kvaternió *valós részén* (skalár rész) az $S(q) := a \in \mathbb{R}$ valós számot, *képzetes részén* (vektor rész) a $V(q) := b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k \in \mathbb{R}^3$ vektort értjük most is a $\mathbb{H}$ struktúrával összhangban.

Ha $q = b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k$, $q' = b' \cdot i + c' \cdot j + d' \cdot k \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ két tiszta képzetes általánosított kvaternió, akkor szorzatuk

$$q \cdot q' = -(\alpha \cdot b \cdot b' + \beta \cdot c \cdot c' + \alpha \cdot \beta \cdot d \cdot d') + [(c \cdot d' - d \cdot c') \cdot \beta \cdot i + (d \cdot b' - b \cdot d') \cdot \alpha \cdot j + (b \cdot c' - c \cdot b') \cdot k]$$

lesz.

E két általánosított kvaternió *skaláris szorzatán* a $q \circ q' := \alpha \cdot b \cdot b' + \beta \cdot c \cdot c' +$

$+\alpha \cdot \beta \cdot d \cdot d' \in \mathbb{R}$ skalárt értjük.

E két általánosított kvaternió *vektoriális szorzatán* a $q \times q' := (c \cdot d' - d \cdot c') \cdot \beta \cdot i + (d \cdot b' - b \cdot d') \cdot \alpha \cdot j + (b \cdot c' - c \cdot b') \cdot k \in \mathbb{R}^3$ vektort értjük.

Ekkor tehát teljesül a $q \cdot q' = -(q \circ q') + (q \times q')$ összefüggés.

T: A tiszta képzetes általánosított kvaterniók a skalárral való szorzással és az összeadással vektorteret, a skaláris szorzással általánosított euklideszi vektorteret alkot az $\mathbb{R}$ test felett, amely struktúrát a továbbiakban az $E^3_{\alpha\beta}$ szimbólummal jelölünk.

## 3. Vektorgeometria az $E^3_{\alpha\beta}$ struktúrában

T: A $\circ: E^3_{\alpha\beta} \times E^3_{\alpha\beta} \rightarrow \mathbb{R}$ skaláris szorzat egy szimmetrikus bilineáris leképezés:

(a) $q \circ q' = q' \circ q$ kommutatív,
(b) $(r \cdot q) \circ q' = q \circ (r \cdot q') = r \cdot (q \circ q')$ homogén,
(c) $(q + q') \circ q'' = q \circ q'' + q' \circ q''$ disztributív.

T: Az $\times: E^3_{\alpha\beta} \times E^3_{\alpha\beta} \rightarrow E^3_{\alpha\beta}$ vektoriális szorzat egy alternáló bilineáris leképezés:

(a) $q' \times q = -(q \times q')$ anti-kommutatív,
(b) $(r \cdot q) \times q' = q \times (r \cdot q') = r \cdot (q \times q')$ homogén,
(c) $(q + q') \times q'' = q \times q'' + q' \times q''$ disztributív.

Ha $q, q', q'' \in E^3_{\alpha\beta}$, akkor e három vektor *vegyesszorzatán* a $qq'q'' = (q \times q') \circ q'' \in \mathbb{R}$ valós számot értjük.

T: A vegyesszorzat tulajdonságai $E^3_{\alpha\beta}$ struktúrában:

(a) $qq'q'' = q'q''q = q''qq' = \alpha \cdot \beta \cdot det(q, q', q'')$,
(b) $qq'q'' = -q''q'q$.

T: GRASSMANN-AZONOSSÁG (kifejtési tétel)

Minden $q, q', q'' \in E^3_{\alpha\beta}$ esetén érvényesek az alábbi összefüggések:

(a) $(q \times q') \times q'' = (q \circ q'') \cdot q' - (q' \circ q'') \cdot q,$
(b) $q \times (q' \times q'') = (q \circ q'') \cdot q' - (q \circ q') \cdot q''.$

T: JACOBI-AZONOSSÁG

Minden $q, q', q'' \in E^3_{\alpha\beta}$ esetén:

$$(q \times q') \times q'' + (q' \times q'') \times q + (q'' \times q) \times q' = \vec{0}$$

T: LAGRANGE-AZONOSSÁG

Minden $q, q', q'', q''' \in E^3_{\alpha\beta}$ esetén:

$$(q \times q') \circ (q'' \times q''') = (q \circ q'') \cdot (q' \circ q''') - (q \circ q''') \cdot (q' \circ q'')$$

T: SPECIÁLIS LAGRANGE-AZONOSSÁG

Minden $q, q' \in E^3_{\alpha\beta}$ esetén:

$$(q \times q') \circ (q \times q') = (q \circ q) \cdot (q' \circ q') - (q \circ q')^2$$

## Felhasznált irodalom

1. Dickson, L. E. (1912): Linear algebras. Trans. Amer. Math. Soc. 13(1):59-73.
2. Jafari, M.–Yayli, Y. (2015): Generalized Quaternions and Their Algebraic Properties. Commun. Fac. Univ. Ank. Ser. A1, 64(1):15-27.
3. Hamilton, W. R. (1847): On Quaternions. Proceedings of the Royal Irish Academy 3:1-16.
4. Rosenfeld, B. (1997): Geometry of Lie groups. Kluwer Academic Publishers, Netherlands.
5. Ward, J. P. (1997): Quaternions and Cayley Numbers. Springer Science, Bussines Media B. V.