

W. R. HAMILTON KVATERNIÓI ÉS AZ ÁLTALÁNOSÍTOTT VEKTORGEOMETRIA MEGSZÜLETÉSE

Péntek Kálmán

Eötvös Loránd Tudományegyetem, SEK
Berzsenyi Dániel Pedagógusképző Központ,
Matematika Tanszék, 9700 Szombathely, Károlyi Gáspár tér 4.

1. Klasszikus Kvaterniók (W. R. Hamilton, 1843)

$$\mathbb{H} := \{a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

Kvaternió egységek: $1, i, j, k$

$$i^2 = -1, \quad j^2 = -1, \quad k^2 = -1$$
$$i \cdot j = -j \cdot i = k, \quad j \cdot k = -k \cdot j = i, \quad k \cdot i = -i \cdot k = j$$

Műveletek:

(1) skalárral való szorzás:

$$r \cdot (a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k) = (r \cdot a) + (r \cdot b) \cdot i + (r \cdot c) \cdot j + (r \cdot d) \cdot k$$

(2) összeadás:

$$(a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k) + (a' + b' \cdot i + c' \cdot j + d' \cdot k) =$$
$$= (a + a') + (b + b') \cdot i + (c + c') \cdot j + (d + d') \cdot k$$

(3) szorzás:

$$(a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k) \cdot (a' + b' \cdot i + c' \cdot j + d' \cdot k) =$$
$$= (a \cdot a' - b \cdot b' - c \cdot c' - d \cdot d') + (a \cdot b' + b \cdot a' + c \cdot d' - d \cdot c') \cdot i$$
$$+ (a \cdot c' - b \cdot d' + c \cdot a' + d \cdot b') \cdot j + (a \cdot d' + b \cdot c' - c \cdot b' + d \cdot a') \cdot k$$

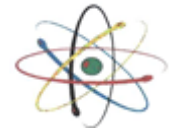
T: \mathbb{H} az (1) – (3) műveletekkel egy 4-dimenziós, nem kommutatív, de asszociatív és neutrális elemes algebrát alkot az \mathbb{R} test felett.

A $q = a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k \in \mathbb{H}$ kvaternió *valós részén* (skalár rész) az $S(q) = a \in \mathbb{R}$ számot, *képzetes részén* (vektor rész) a $V(q) = b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k \in \mathbb{R}^3$ vektort értjük.

Ha $q = b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k, q' = b' \cdot i + c' \cdot j + d' \cdot k \in \mathbb{H}$ két tiszta képzetes kvaternió, akkor szorzatukra

$$q \cdot q' = -(b \cdot b' + c \cdot c' + d \cdot d')$$
$$+ [(c \cdot d' - d \cdot c') \cdot i + (d \cdot b' - b \cdot d') \cdot j + (b \cdot c' - c \cdot b') \cdot k]$$

adódik.



E két kvaternió *skaláris szorzatán* a $q \circ q' := b \cdot b' + c \cdot c' + d \cdot d' \in \mathbb{R}$ skalárt értjük.

E két kvaternió *vektoriális szorzatán* pedig a $q \times q' := (c \cdot d' - d \cdot c') \cdot i + (d \cdot b' - b \cdot d') \cdot j + (b \cdot c' - c \cdot b') \cdot k \in \mathbb{R}^3$ vektort értjük.

Ekkor tehát $q \cdot q' = -(q \circ q') + (q \times q')$ teljesül.

T: A tiszta képzetes kvaterniók halmaza a skalárral való szorzással és az összeadással vektorteret, a skaláris szorzással együtt azonban E^3 euklideszi vektorteret alkot az \mathbb{R} test felett.

2. Általánosított Kvaterniók (L.E. Dickson, 1912)

$$\mathbb{H}_{\alpha\beta} := \{a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

Általánosított kvaternió egységek: $1, i, j, k$

$$i^2 = -\alpha, \quad j^2 = -\beta, \quad k^2 = -\alpha \cdot \beta$$

$$i \cdot j = -j \cdot i = k, \quad j \cdot k = -k \cdot j = \beta \cdot i, \quad k \cdot i = -i \cdot k = \alpha \cdot j$$

Műveletek:

(4) skalárral való szorzás:

$$r \cdot (a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k) = (r \cdot a) + (r \cdot b) \cdot i + (r \cdot c) \cdot j + (r \cdot d) \cdot k$$

(5) összeadás:

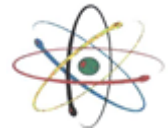
$$\begin{aligned} (a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k) + (a' + b' \cdot i + c' \cdot j + d' \cdot k) &= \\ &= (a + a') + (b + b') \cdot i + (c + c') \cdot j + (d + d') \cdot k \end{aligned}$$

(6) szorzás:

$$\begin{aligned} (a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k) \cdot (a' + b' \cdot i + c' \cdot j + d' \cdot k) &= \\ &= (a \cdot a' - \alpha \cdot b \cdot b' - \beta \cdot c \cdot c' - \alpha \cdot \beta \cdot d \cdot d') \\ &\quad + (a \cdot b' + b \cdot a' + \beta \cdot c \cdot d' - \beta \cdot d \cdot c') \cdot i \\ &\quad + (a \cdot c' - \alpha \cdot b \cdot d' + c \cdot a' + \alpha \cdot d \cdot b') \cdot j \\ &\quad + (a \cdot d' + b \cdot c' - c \cdot b' + d \cdot a') \cdot k \end{aligned}$$

T: $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ a (4) – (6) műveletekkel egy 4-dimenziós, nem kommutatív, de asszociatív és neutrális elemes algebrát alkot az \mathbb{R} test felett.

Speciálisan, ha $\alpha = \beta = 1$, akkor $\mathbb{H}_{\alpha\beta} = \mathbb{H}$ teljesül.



A $q = a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ általánosított kvaternió *valós részén* (skalár rész) az $S(q) := a \in \mathbb{R}$ valós számot, *képzetes részén* (vektor rész) a $V(q) := b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k \in \mathbb{R}^3$ vektort értjük most is a \mathbb{H} struktúrával összhangban.

Ha $q = b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k, q' = b' \cdot i + c' \cdot j + d' \cdot k \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ két tiszta képzetes általánosított kvaternió, akkor szorzatuk

$$q \cdot q' = -(\alpha \cdot b \cdot b' + \beta \cdot c \cdot c' + \alpha \cdot \beta \cdot d \cdot d') \\ + [(c \cdot d' - d \cdot c') \cdot \beta \cdot i + (d \cdot b' - b \cdot d') \cdot \alpha \cdot j + (b \cdot c' - c \cdot b') \cdot k]$$

lesz.

E két általánosított kvaternió *skaláris szorzatán* a $q \circ q' := \alpha \cdot b \cdot b' + \beta \cdot c \cdot c' + \alpha \cdot \beta \cdot d \cdot d' \in \mathbb{R}$ skalárt értjük.

E két általánosított kvaternió *vektoriális szorzatán* a $q \times q' := (c \cdot d' - d \cdot c') \cdot \beta \cdot i + (d \cdot b' - b \cdot d') \cdot \alpha \cdot j + (b \cdot c' - c \cdot b') \cdot k \in \mathbb{R}^3$ vektort értjük.

Ekkor tehát teljesül a $q \cdot q' = -(q \circ q') + (q \times q')$ összefüggés.

T: A tiszta képzetes általánosított kvaterniók a skalárral való szorzással és az összeadással vektorteret, a skaláris szorzással általánosított euklideszi vektorteret alkot az \mathbb{R} test felett, amely struktúrát a továbbiakban az $E_{\alpha\beta}^3$ szimbólummal jelölünk.

3. Vektorgeometria az $E_{\alpha\beta}^3$ struktúrában

T: $A \circ: E_{\alpha\beta}^3 \times E_{\alpha\beta}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ skaláris szorzat egy szimmetrikus bilineáris leképezés:

- (a) $q \circ q' = q' \circ q$ kommutatív,
- (b) $(r \cdot q) \circ q' = q \circ (r \cdot q') = r \cdot (q \circ q')$ homogén,
- (c) $(q + q') \circ q'' = q \circ q'' + q' \circ q''$ disztributív.

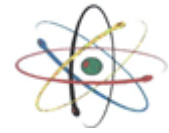
T: Az $\times: E_{\alpha\beta}^3 \times E_{\alpha\beta}^3 \rightarrow E_{\alpha\beta}^3$ vektoriális szorzat egy alternáló bilineáris leképezés:

- (a) $q' \times q = -(q \times q')$ anti-kommutatív,
- (b) $(r \cdot q) \times q' = q \times (r \cdot q') = r \cdot (q \times q')$ homogén,
- (c) $(q + q') \times q'' = q \times q'' + q' \times q''$ disztributív.

Ha $q, q', q'' \in E_{\alpha\beta}^3$, akkor e három vektor *vegyesszorzatán* a $qq'q'' = (q \times q') \circ q'' \in \mathbb{R}$ valós számot értjük.

T: A vegyesszorzat tulajdonságai $E_{\alpha\beta}^3$ struktúrában:

- (a) $qq'q'' = q'q''q = q''qq' = \alpha \cdot \beta \cdot \det(q, q', q'')$,
- (b) $qq'q'' = -q''q'q$.



T: GRASSMANN-AZONOSSÁG (kifejtési tétel)

Minden $q, q', q'' \in E_{\alpha\beta}^3$ esetén érvényesek az alábbi összefüggések:

- (a) $(q \times q') \times q'' = (q \circ q'') \cdot q' - (q' \circ q'') \cdot q,$
- (b) $q \times (q' \times q'') = (q \circ q'') \cdot q' - (q \circ q') \cdot q''.$

T: JACOBI-AZONOSSÁG

Minden $q, q', q'' \in E_{\alpha\beta}^3$ esetén:

$$(q \times q') \times q'' + (q' \times q'') \times q + (q'' \times q) \times q' = \vec{0}$$

T: LAGRANGE-AZONOSSÁG

Minden $q, q', q'', q''' \in E_{\alpha\beta}^3$ esetén:

$$(q \times q') \circ (q'' \times q''') = (q \circ q'') \cdot (q' \circ q''') - (q \circ q''') \cdot (q' \circ q'')$$

T: SPECIÁLIS LAGRANGE-AZONOSSÁG

Minden $q, q' \in E_{\alpha\beta}^3$ esetén:

$$(q \times q') \circ (q \times q') = (q \circ q) \cdot (q' \circ q') - (q \circ q')^2$$

Felhasznált irodalom

1. Dickson, L. E. (1912): Linear algebras. Trans. Amer. Math. Soc. 13(1):59-73.
2. Jafari, M.–Yayli, Y. (2015): Generalized Quaternions and Their Algebraic Properties. Commun. Fac. Univ. Ank. Ser. A1, 64(1):15-27.
3. Hamilton, W. R. (1847): On Quaternions. Proceedings of the Royal Irish Academy 3:1-16.
4. Rosenfeld, B. (1997): Geometry of Lie groups. Kluwer Academic Publishers, Netherlands.
5. Ward, J. P. (1997): Quaternions and Cayley Numbers. Springer Science, Bussines Media B. V.