HALMAZÁBRÁK ÚJRAGONDOLVA

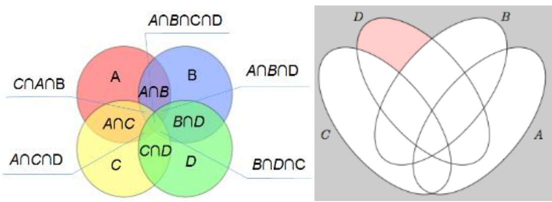
Péchy Zoltán Péter

Eötvös Loránd Tudományegyetem, SEK
Berzsenyi Dániel Pedagógusképző Központ,
Matematika Tanszék, 9700 Szombathely, Károlyi Gáspár tér 4.
e-mail: pechyzfizika@gmail.com

Korábbi tanulmányomkor ismertem meg a négy halmaz Venn-diagramját. Érdekelt az ötös. 1992-ben sem Internettel, sem hozzáférhető szakirodalommal nem találkoztam. Azóta több, jelenleg még nem publikált új szerkesztési módot találtam ki. Eljárásaim különbözők az eddigiektől. Az ábrák felhasználását korlátozza, hogy öt vagy több halmaz esetén nem, vagy csak bonyolultan szerkeszthetők. [11], [12] Az ábrákat más megközelítésből szerkesztettem meg.
Kulcsszavak: Venn-diagram(1), forgásszimmetria(2), tengelyes szimmetria(3), koncentrikus körök(4), szabályos sokszögek(5), Excel táblázat(6)

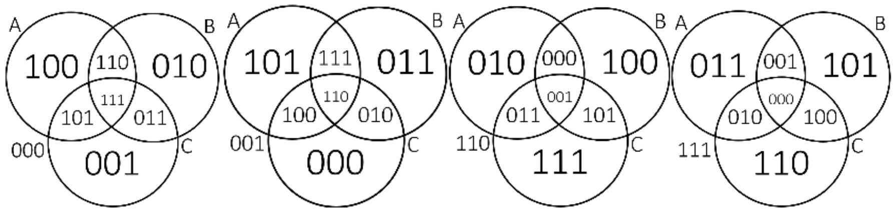
1. A probléma bemutatása

Két vagy három kör metszeteit könnyű ábrázolni úgy, hogy minden részhalmaz megtalálható (pontosan egyszer). Négy halmaz esetén az összes lehetséges metszet csak egymást metsző körvonalak felhasználásával nem lehetséges. A szemközti halmazok (A□D és a B□C) metszetei síkban nem szerkeszthetők. Egyszerű matematikával adódik, hogy míg három halmazra $2^3 = 8$ részhalmazt kell beépíteni, öt halmaznál már $2^5 = 32$ ez a szám. Tíz halmazra pedig már $2^{10} = 1024$. Egyszerre van jelen a szép szimmetria, és a rendkívül gyorsan növekvő bonyolultság. John Venn publikálta a következő ábrákat:



1. ábra: Diagramok négy halmazra (próba, és sikeres megvalósítás) [6], [7].

Venn-diagram definíciója: Egy olyan diagram (például a szimbolikus logikában)[7], amely halmazok közötti kapcsolatokat (metszet, tartalmazás, kizárás) mutat be, átfedő körökkel vagy egyéb síkidomokkal. Formálisan, [2] alapján, legyen $C = \{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ egyszerű zárt görbék gyűjteménye a síkon. A C kollekciót független családnak nevezzük, ha az $X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n$ metszethalmaz sosem üres, ahol X_i vagy int (C_i) (azaz C_i belseje), vagy ext (C_i) (azaz C_i külseje). Tehát: összesen 2^n különböző metszethalmazt kell megvizsgálnunk, és a határvonal nincs benne egyik X_i-ben sem. A C független család görbéi Venn-diagramot állítanak elő, ha az $X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n$ metszethalmazok nyíltak és összefüggők. Három halmaz Venn-diagramjai Gray kóddal.

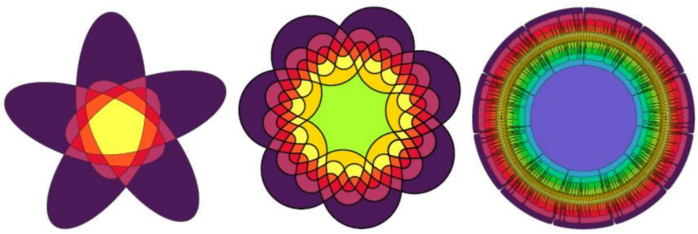


2. ábra: a) Három halmaz belseje, b) két halmaz belseje, egy külseje, c) egy halmaz belseje, kettő külseje, d) három halmaz külseje (összesen 2^3= 8 ábra, ebből a négy lényegesen különböző).

n= 2, 3 esetén a Venn-diagram konstrukciók egyszerűek. Egyáltalán nem nyilvánvaló, hogy nagyobb n-re milyen megoldások vannak, azaz léteznek-e Venn-diagramok?. [3] Olyan egybevágó halmazokat terveztem, amelyek tengelyesen szimmetrikusak. Belőlük felépített Venn-diagram pedig vagy tengelyesen szimmetrikus vagy forgásszimmetrikus.

Tétel: *Szimmetrikus n-Venn diagram pontosan akkor létezik, ha n prím* [3]

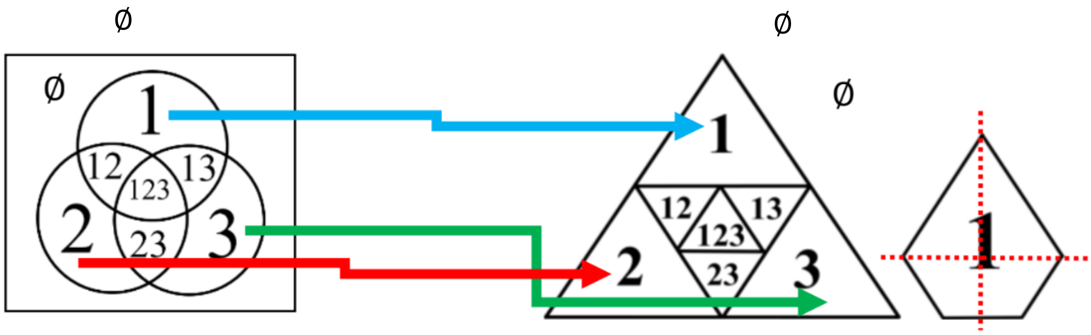
Az exponenciális növekedés ténye azt jelenti, hogy ez a probléma a felbukkanásától kezdve folyamatosan, az azóta eltelt nagyjából 250 évben erősen foglalkoztatja a matematikusokat és a lelkes kutatókat, [1] (2004). Az elmúlt nagyjából 15 évben is születtek fontos eredmények. Itt már tudományos dolgozatokat kell kézbe vennünk. Érdemes kiemelni az [5] és a [8] munkákat. Utóbbiban már *n* = 13-ra találunk megoldást.



3. ábra: Szimmetrikus Venn-diagramok n = 5, 7 és 11-re [5].

2. Szabályos sokszögek és a Venn-diagram

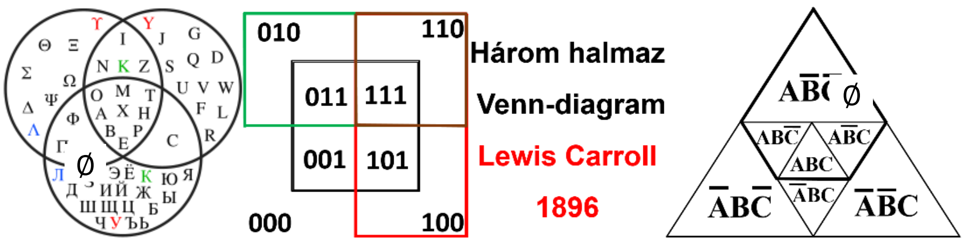
2.1. Három halmaz (prím)



4. ábra: A klasszikus alakból konstruált, 3 szabályos háromszögből álló diagram (egy halmazalakkal).

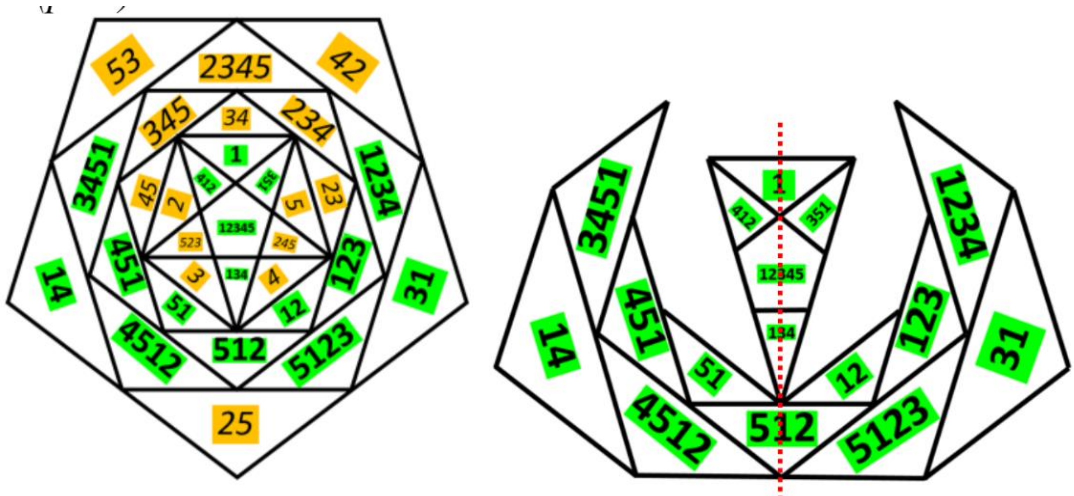
Nagyon fontos az *analógia*; hogyan tudok kapcsolódni a korábbi Venn-diagramokhoz. John Venn 1880-as kéziratával kapcsolatban kérdés merült fel bennem. [6] Ha egymást metsző körökkel nem tudunk előállítani ábrákat, akkor létezik-e másik módszer? Az első ábrám kör alakú [9], és a halmazalakok egybevágók. 1993-ban sikerült előállítani a *csak szabályos ötszögekből* álló rajzot.

A halmazalakok *tengelyes szimmetriája* csak 2017-ben készült el. A 4. ábrán jól szemléltethető, hogyan lehet átvezetni a klasszikus, egymást metsző három kör Venn-diagramját az általam kigondolt poligon rendszere. A körvonalak „kiegyenesítése” után már csak át kell másolni a részhalmaz jelöléseket. Egy halmaz alakja így megváltozik, de konvex tulajdonság megmarad! Ekkor 360:3=120 fok elforgatásával előáll a diagram. A forgatás centruma a szabályos háromszög köré szerkeszthető kör középpontja. *n* halmaz esetén a Venn-diagram *n* szabályos háromszögből áll. Az oldalfelezők összekötéséből keletkezik az újabb. Egy „körgyűrű” számsort tartalmaz. Az {**1**, *2*, *3*} és {**12**, *23,* **31**}. A számsorok előállítása: a következő szám eggyel nagyobb az előzőnél, azaz **1**-*2*-*3*, majd **1**. Hasonlóan történik az **12**-*23*-**31**, majd **12**. A *félkövé*r jelenti a hozzátartozást az *egyes* halmazalakhoz, a *dőlt betű* pedig a nem tartalmazást. Ez a felépítés biztosítja a forgásszimmetriát (egymásba történő forgatást). Egy halmazalakban (4. ábra jobb) az egyes számot tartalmazó részhalmazok lehetnek. Három halmazalak alkotja a diagramot, amelyek egybevágók és tengelyesen szimmetrikusak.



5. ábra: a) Görög, latin és cirill nagybetűk közös részei, b) Lewis Carroll-1896
c) Informatikai alkalmazás a Boole-algebra segítségével, 1=: A, 2=: B, és 3=: C jelöléssel.
Háromváltozós Venn diagram esetén, minden részterületéhez a megfelelő bemeneti kombináció van bejelölve.

2.2. Öt halmaz (prím)

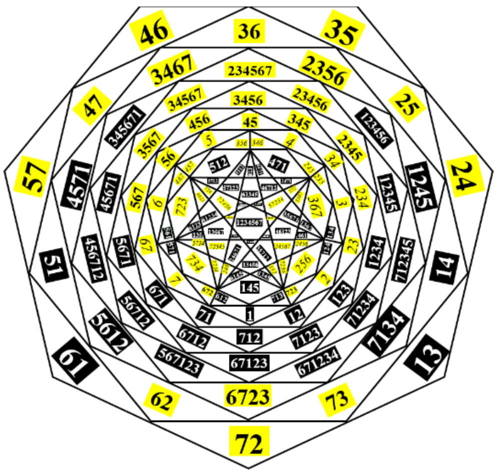


6. ábra: Öt szabályos ötszög egy halmazalakkal.

Öt halmaz esetén a Venn-diagram ábra öt szabályos ötszögből és öt darab szakaszból áll. Egy „körgyűrű” egy számsort alkot {**1**, *2*, *3*, *4*, *5*} A számsorok előállítása ugyanez. Egy halmazalakban az egyes számot tartalmazó részhalmazok állnak. Öt halmaz alkotja a diagramot, amelyek egybevágók és tengelyesen szimmetrikusak. Egymásba forgatható az öt halmaz, 360: 5. A forgás középpontja az ötszögek köré írható kör középpontja. Öt halmaz esetén a diagram teljesíti a Venn-diagram *tulajdonságait.*

2.3. Hét halmaz (prím)

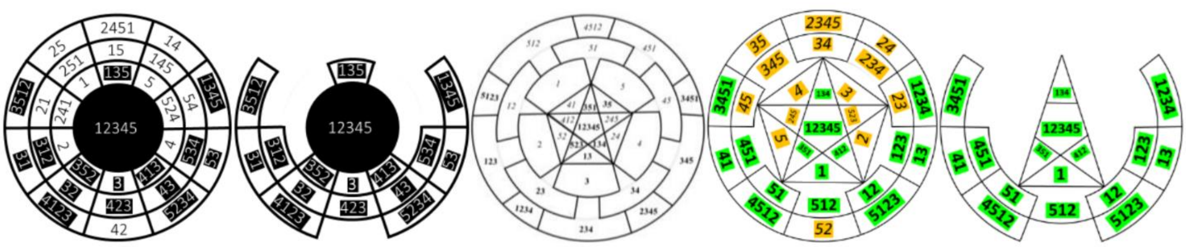
A részhalmaz számok exponenciális növekedése miatt, hét halmaz esetén 2^7= 128 db. Ezért előre tervezhető módszer kellett, ami minden további prímszám esetén lehetővé teszi a szimmetrikus Venn-diagramok szerkesztését. *Tizenegy* szabályos hétszögből áll (egyes). A szerkesztés menete ugyanaz, mint a korábbiaknál, így új információt nem adnak. A Gray-kóddal történő jelölés (az 12345=: 11111 vagy 235=: 01101, azaz amelyik szám szerepel, a részhalmazban azt egyessel jelöljük, ami nincs az 0) néha megkönnyíti, máskor megnehezíti az ábrázolást. Én a Gray-kód mentes változatot alkalmazom, mert 11 halmaz esetén már ki kell írni *1* helyett az *10000000000*-t. Ez jelentős többletmunkával és helyigénnyel jár. Az informatikai felhasználás esetén a 0, 1 bináris jelölés hasznosabb. Ezt majd a felhasználás során ki-ki eldönti melyik előnyösebb. A színek alkalmazása (tapasztalatom szerint) nagyon előnyös. Látványosak az ábrák, és a hibák is hamarabb kiderülnek szerkesztéseknél. A későbbiekben tárgyalásra kerülő Excel táblázatban történő munkavégzésnél elengedhetetlen, hogy azonnal láthatók legyenek az új létrehozott formák. Hét halmazalak alkotja a diagramot, amelyek egymásba forgathatók 360:7 fokkal. Tizennyolc számcsoport van, azaz 18·17·16·…·3·2·1=18! módon helyezhetem el őket. Ezek közül sok nem lesz Venn-diagram. Ha már egy teljesítette a feltételeket - figyelembe véve a tengelyes szimmetriát is -, akkor jöhet az újabb kihívás.
Hét halmaz esetén a diagram teljesíti a Venn-diagram definicióját, továbbá a halmazalakok egybevágók, és tengelyesen szimmetrikusak.



7. ábra: Tizenegy szabályos hétszöggel (forgásszimmetrikus és tengelyes szimmetria a halmazalaknál).

3. Koncentrikus körök és a Venn-diagram

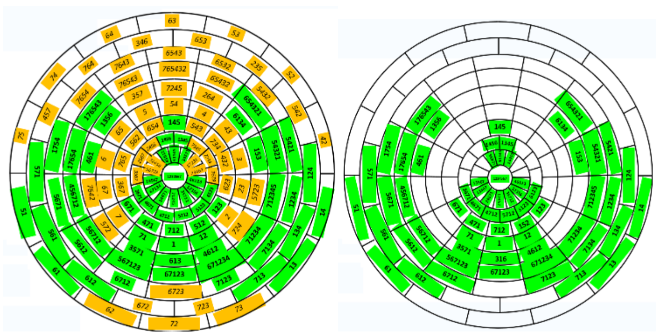
3.1. Öt halmaz



8. ábra: a) Négy koncentrikus körrel és harminc szakasszal, b) az első, c) belül ötszög, átlókkal – 2018.

Öt halmaz Venn-diagramja négy koncentrikus körből és 30 szakaszból áll. Öt halmazalak alkotja a diagramot, amelyek egybevágók és tengelyesen szimmetrikusak. Egymásba forgatható (360:5= 72 fok). Különbség a hármashoz képest, hogy a 2^3=8 helyett, 2^5=32 részhalmazt kell elhelyezni úgy, hogy a halmazalakok egybevágósága és tengelyes szimmetriája megmaradjon. Egy körgyűrűben két ötös számcsoport van. A számcsoportok nem ismétlődhetnek. Úgy vannak elhelyezve, hogy minden hármast tartalmazó részhalmazba „át tudjuk menni" bármelyikből. Ha ez nem teljesül, akkor nem Venn-diagram! Látható, hogy belülről kifelé haladva piramishoz hasonlít.

3.2. Hét halmaz



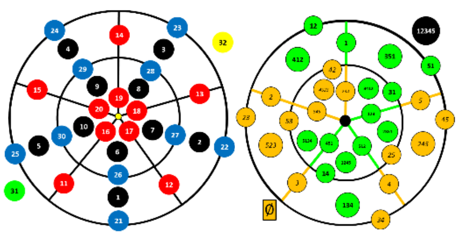
9. ábra: Hét halmaz Venn-diagramja és egy halmazalak (analógia a 2.3. alfejezet).

Hét halmaz esetén a Venn-diagram tíz koncentrikuskörből és szakaszokból áll. A szerkesztés menete megegyezik. Egy körgyűrűben két számcsoport van, amelyek fogaskerék szerűen kepcsolódnak. Hét halmazalak alkotja a diagramot, amelyek egymásba forgathatók 360:7. Hét halmaz esetén a diagram tulajdonságai megegyeznek a 2.3. alfejezettel.

4. Legegyszerűbb Venn-diagramjaim

Az alapötletet, hogy a halmaz számok növekedésével az ábrák egyre nagyobbak lesznek. Csökkenteni kell a felhasznált geometriai alakzatokat. A körgyűrűk, a körívek és a szakaszok, amelyek a körgyűrűkön belül találhatók (elválasztók), mind felhasználhatók részhalmazokként. Körcikk esetén a kör sugara jelenti a szomszédok metszetét. Pl.: az $\{\mathbf{1}, 2\}$ és $\{3, \mathbf{1}\}$ metszete az $\{\mathbf{1}\}$. A szakaszok egy pontban, a kör középpontjában metszik egymást $\{\mathbf{1}, 2, 3\}$. Az üres halmaz a diagramon kívül ($\varnothing$). A körvonal pontjai hozzátartoznak a körcikkhez, három halmaz esetén.

4.1. Öt halmaz



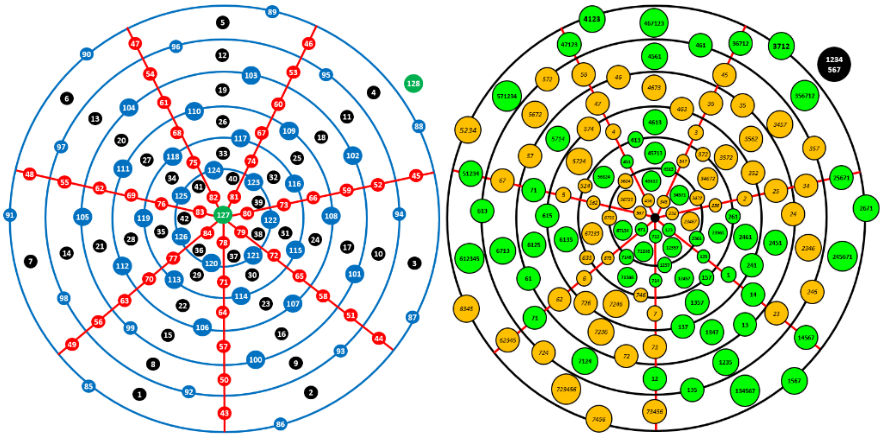
10. ábra: a) Részhalmazok 1-32-ig (2^7), b) Venn-diagramja.

Két koncentrikus kör és tíz szakasz felhasználása, értelmezése

a) fekete alapon fehér számok jelentik a körgyűrűben elhelyezkedő részhalmazokat (1-10). A piros alapon fehér jelenti a szakaszokon elhelyezkedő részhalmazokat (11-20). A sötétkék alapon fehér a köríveken elhelyezkedő részhalmazok (21-30).

Az üres halmazt a neon zöld (31), az {**1**, *2*, *3*, *4*, *5*}-t a sárga 32 jelöli. A szakaszok és körívek darabjai csak metszetek lehetnek. Egy körgyűrűben csak olyan számok lehetnek, ahol teljesül: a szomszédos részhalmazok minden halmaz száma eggyel növekszik, vagy csökken, azaz {**1**, *2*, *3*, *4*,}, {*2*, *3*, *4*, *5*}, {*3*, *4*, *5*, *1*}, {*4*, *5*, **1**, *2*}, {*5*, **1**, *2*, *3*}. Emiatt forgásszimmetrikusak, és egybevágók az ábráim! Ez a megkülönböztető jegye az ábráimnak, ez jelenti véleményem szerint az újszerűségét.

4.2. Hét halmaz



11. ábra: Részhalmazok számozása 1-128-ig (2^7).

A számcsoportok hét számból állnak, amelyek 18 féleképpen helyezhetők el ismétlés nélkül ($18 \cdot 7 + 2 = 126 + 2 = 128 = 2^5$). Azaz *18!* (6402 billió). Ezért új módszer segítségére volt szükség. Egy megoldás az Excel táblázat. alkalmazása. Ennek segítségével készültek el először az alakok. Az ábra rendelkezik a Venn-diagramok minden tulajdonságával.

1. táblázat: a) Hét halmaz Venn-diagramja Excel táblázatban, b) nagyított részlete.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	4567123														
2	345	45613	456	56724	567	67135	671	71246	712	12357	123	23461	234	34572	1. gyűrű
3		4513		5624		6735		7146		1257		2361		3472	körív 1.
4	347	45713	451	56124	562	67235	673	71346	714	12457	125	23561	236	34672	2. gyűrű
5		413		524		635		746		157		261		372	körív 2.
6	3	4613	4	5724	5	6135	6	7246	7	1357	1	2461	2	3572	3. gyűrű
7		463		574		615		726		137		241		352	körív 3.
8	36	4673	47	5714	51	6125	62	7236	73	1347	14	2451	25	3562	4. gyűrű
9		46		57		61		72		13		24		35	körív 4.
10	45	4561	56	5672	67	6713	71	7124	12	1235	23	2346	34	3457	5. gyűrű
11		461		572		613		724		135		246		357	körív 5.
12	36712	467123	47123	571234	51234	612345	62345	723456	73456	134567	14567	245671	25671	356712	6. gyűrű
13		4123		5234		6345		7456		1567		2671		3712	körív 6.
14	1. szakasz		2. szakasz		3. szakasz		4. szakasz		5. szakasz		6. szakasz		7. szakasz		

5724	5	6135	6
574		615	
5714	51	6125	62
57		61	
5672	67	6713	71

Az egyes jelű halmazhoz a neon zöld téglalapok tartoznak (**félkövér**). A hozzá nem tartozók más színűek (*dőlt*). Azaz vizuálisan is követhetők az ábra szerkesztési lépései. Mindegyik egyest tartalmazó téglalapból el lehet jutni bármely másik egyest tartalmazó téglalapba. Ha ez nem teljesülne, akkor nem Venn-diagram! A részhalmazok elhelyezkedése: körgyűrűkben a gyűrű sorában levők, köríveken a körív feliratú sorokban. Végül a szakaszokon a szakasz feliratú oszlopok számai. Az egész táblázatra igaz ez az eljárás!

1. sor: {*5*, *7*, *2*, *4*}∩{**6**, **1**, **3**, **5**}={*5*}, 3. sor: {**5**, **7**, **1**, **4**}∩{**6**, **1**, **2**, **5**}={**5**, **1**},
5. sor: {*5*, *6*, *7*, *2*}∩{**6**, **7**, **1**, **3**}={*6*, *7*},
1. oszlop: {*5*, *7*, *2*, *4*}∩{**5**, **7**, **1**, **4**}={*5*, *7*, *4*}, {**5**, **7**, **1**, **4**}∩{*5*, *6*, *7*, *2*}={*5*, *7*},
3. oszlop: {**6**, **1**, **3**, **5**}∩{**6**, **1**, **2**, **5**}={**6**, **1**, **5**}, {**6**, **1**, **2**, **5**}∩{**6**, **7**, **1**, **3**}={**7**, **1**}

Hat koncentrikus kör és negyvenkét darab szakasz felhasználásával. A jelölések a korábbiak alkalmazása. Az {**1**, *2*, *3*, *4*, *5*, *6*, *7*} részhalmaz a koncentrikus körök középpontjában van. Üres halmaz az ábrán kívül.

A szakaszok és a körívek metszéspontjai *nem tartoznak* a Venn-diagramhoz. Körgyűrűk 6·7 db, a szakaszok 7·6 db és a körívek 6·7 db részhalmazt foglalnak magukban (azaz 126). Továbbá az üreshalmaz és az {**1**, *2, 3, 4, 5, 6, 7*} (összesen $128=2^7$).

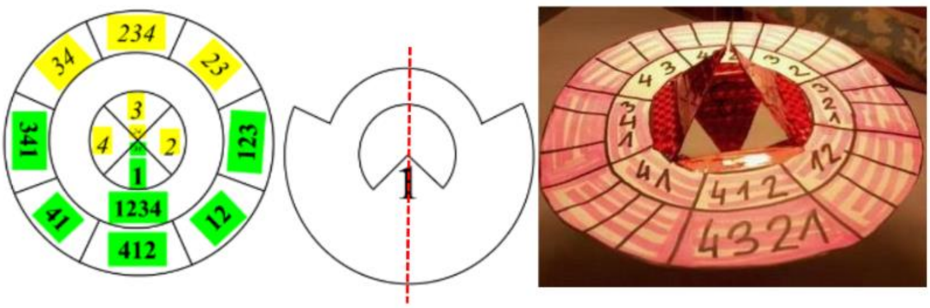
A legegyszerűbb Venn-diagramjaim tulajdonságai

- minden (2^3, 2^5, 2^7) részhalmaz egyszer szerepel. Forgásszimmetrikusak
- a körgyűrűkben található szakaszok részhalmazok, amelyek a szomszédok metszetei
- a körívek darabok, részhalmazok, a szomszédok metszetei

5. Térbeli, térszimmetrikus Venn-diagramok síkba kivetítve

5. 1. Négy halmaz

Nem helyezhető el síkban az {**1**, *3*} és a {*2, 4*} részhalmaz úgy, hogy ne metszenék egymást. Ezért a térbeli szerkesztések felé fordult a figyelmem. Szakirodalomban létezik négy halmaz ábrába, mint az atomok metszete. Én, az általam kitalált formákat képzeltem tovább. Három koncentrikus körrel és tíz szakasszal (a szembe levők egy egyenesre illeszkednek).

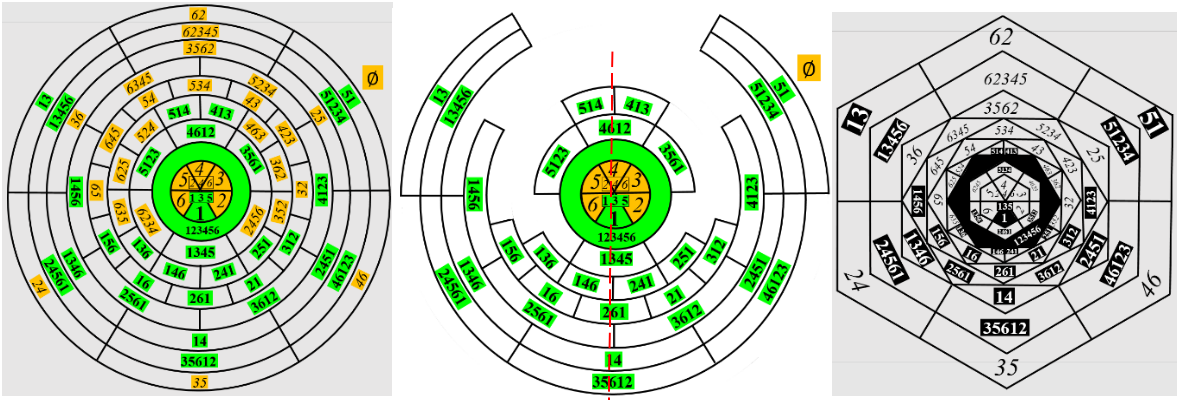


12. ábra: a) Venn-diagram vetület és egy halmazalak, b) makett.

5. 2. Hat halmaz

A b) ábra tíz szabályos hatszögből és 21 darab szakaszból áll. Egy „körgyűrű” egy számsort alkot {**1**, *3*}, {*2, 4*}, {*3, 5*}, {*4, 6*}, {*5,* **1**}, {*6, 2*}, és {**1**, *3*} (körbe ér). A további számsorok előállítása ugyanez. A fekete mezőben fehér szám egy alaphalmazhoz (1) tartozást szemléltet, a többi a nem hozzá tartozást. Hat halmaz építi fel a diagramot, amelyek között vannak egybevágók és tengelyesen szimmetrikusak is. Ez a hat halmaz Venn-diagramos ábra térszimmetrikus, a forgás középpontja a hatszögek köré írható körök középpontja.

Az a) kilenc koncentrikus körből és 60 szakaszból áll. Felépítése megegyezik a b) ponttal.

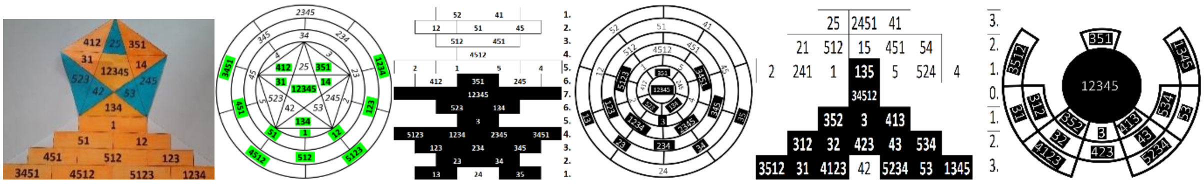


13. ábra: a) diagram és egy halmazalak (felülnézeti kép), b) tíz szabályos hatszöggel (felülnézeti kép), 3D folyamatban.

6. Venn-diagramok szerkesztése Excel táblázat segítségével

A szimmetrikus hét halmaz Venn-diagramos ábrájának egybevágó és szimmetrikus halmazalak létrehozása úgy volt lehetséges, hogy a körgyűrűkben lévő számcsoportokat át kellett helyezni máshová. Egy szövegdobozban lévő szám áthelyezése idővel jár. Kitaláltam egy gyorsabb megoldást a szerkesztéshez, különben a 11 halmaz Venn-diagramos ábrájának elkészítéséről lemondhattam. Ennek jelentősége abban állt, hogy nemzetközi megjelenésben olvasható már a 11 és a 13 halmaz Venn-diagramos publikációi.[8] A *körgyűrű kiegyenesítése*, mint egy újabb *segédlet*. A szerkesztési ötlet egyszerű: minden körgyűrűből két Excel sor lesz egy táblázatban úgy, mintha középen bevágnánk a Venn-diagramot a legbelső körvonalig, majd kiegyenesítjük. A szemben lévő szakaszok egy egyenesre illeszkednek. Így előáll az Excel táblázatba *álmodott* Venn-diagram.

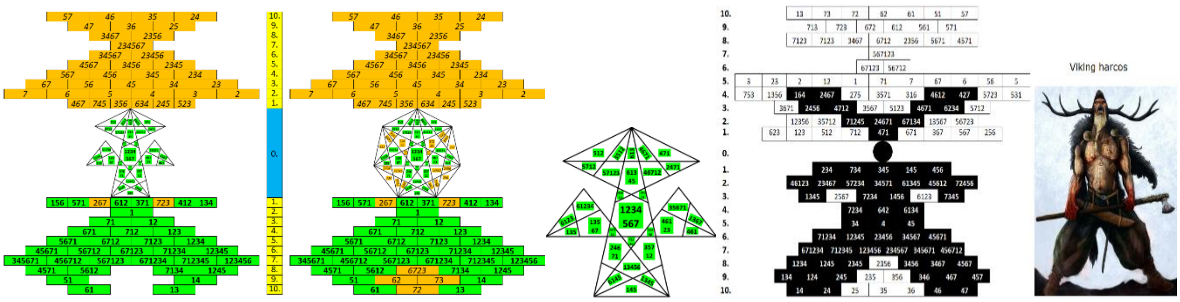
6.1. Öt halmaz



14. ábra: a) Piramis, b) cowboy (THE COWBOY), c) a szellem (THE GHOST).

Boole-algebra és a halmazalgebra alapműveletei megfeleltethetők egymásnak, ezért könnyen szemléltethetők Venn-diagramban (2.1. alfejezet, 5. ábra jobbra). Jelenleg csak három halmaz ábrája használatos, mert nem voltak 4, 5, 6, 7, 8 vagy 11 halmaz ábrára egységes sémák ennek felhasználására. A koncentrikus körökkel, vagy szabályos sokszögekkel szerkesztettek kiterjeszthetik a határokat az Excel táblázat segítségével. A többféle rajz azt szolgálja, hogy a következő prímszámra is lehessen szerkeszteni hasonló alakzatot. Egy algoritmust kerestem. Alapfeltétel, hogy minden fekete (hármast tartalmazó részhalmaznak) legyen közvetlen szomszédja, akár csak egyetlen pontban is (csúcsuknál kapcsolódva). Ekkor lesz összefüggő. Itt egy halmazalakot ötször véve, 360: 5 fokkal elforgatva a koncentrikus körök középpontját tekintve forgás centrumnak. Ekkor előáll a szimmetrikus öt halmaz Venn-diagram, tengelyesen szimmetrikus halmazalakokkal.

6.2. Hét halmaz



15. ábra: a) tizenegy koncentrikuskör és egy szabályos hétszög az átlóival. Létezik a „maradék" számcsoportoknak egy olyan elhelyezése, hogy a halmazalakok egybevágók és tengelyesen szimmetrikusak, b) Egy halmazalak (egy kör és a fekete téglalapok összessége). Tíz körgyűrű és tizenegy koncentrikus kör.

Az Excel táblázat alkalmazása jelentős fejlődési lépés, amely újszerű lehetőségeket rejt magában. Hasonlóan a korábbiakhoz, az $\{1\},\{2\}\ldots\{7\}$ a 2. sor, az $\{1, 2,\}$, $\{2, 3\}$,...$\{6, 7\}$, 3., $\{1,2,3,4,5,6\},\ldots\{2,3,4,5,6,7\}$, 7. sor. Ez a felépítés biztosítja a piramis alakot (3, 5, és 7). Ez az általánosítás. A leglátványosabb ábra (b), amely egy Viking Harcosra hasonlít. Ennek oka, hogy az Excel táblázat sorai felcserélhetők egymással. Megtippelhetetlen, hogy hányféle diagram teljesíti a Venn-diagram definicióját. Ezért nem találtam eddig algoritmust. Mind a hét halmazalak egybevágó és tengelyesen tükrös. A körben az $\{\mathbf{1}, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ szerepel.

7. További kutatási terveim

- a *nyolcas* befejezése, Excel táblából koncentrikus köröket tartalmazó ábrába
- *kilences és a tízes* Venn-diagram szerkesztése
- a négyes, hatos és nyolcas diagramok *3D-s* makettjének elkészíttetése
- a halmazábráim mérnöki *szerkesztő programokkal* való teljes átdolgozása
- *felhasználási lehetőségek* összegyűjtése; oktatás, informatika, automatizálás és marketing

Felhasznált irodalom

1. Anthony William Fairbank Edwards (2004): Cogwheels of the Mind: The Story of Venn Diagrams. Johns Hopkins University Press, Baltimore
2. Branko Grünbaum (1975): Venn diagrams and independent families of sets, Math. Magazine, 48, 12-23
3. D. W. Henderson (1963): Venn diagrams for more than four classes, American Math. Monthly 70, 424-426.
4. Frank Ruskey, Mark Weston (2005): A Survey of Venn Diagrams, The Electronic Journal Of Combinatoics. (Online változat: http://www.combinatorics.org/files/Surveys/ds5/VennEJC.html)
5. Frank Ruskey, Carla D. Savage, Stan Wagon (2006): The Search for Simple Symmetric Venn Diagrams, Notices of the Amer. Math. Society 53/11, 1304-1311.
6. John Venn, (1880): On the diagrammatic and mechanical representation of propositions and reasonings, Philosophical Magazine Series 5, 10:59, 1-18.
(Online változat: https://www.cis.uenn.edu/~bhusnur4/cit592_fall2014/venn%20diagrams.pdf)
7. John Venn (1881): Symbolic Logic, Macmillan & Co., London
8. Khalegh Mamakani, Frank Ruskey (2014), New Roses: Simple Symmetric Venn Diagrams with 11 and 13 Curves, Discrete Comput. Geom. 52, 71–87.
9. Péchy Zoltán Péter (2017): Öt és hét halmaz Venn-diagramos ábrázolásai, kör és szabályos sokszög alakokban. A szerkesztési menet öröklődése. Tudományos és Művészeti Diák Konferencia, Győr, SZE
10. Péchy Zoltán Péter (2018): Matematikai halmazábráim, mint az oktatás, szakmódszertani segédeszközei. (Újszerű szerkesztési módok, szimmetrikus és majdnem szimmetrikus Venn-diagramjaim). Tudományos és Művészeti Diák Konferencia, Győr, SZE
11. Tuzson Zoltán (május/2014.): A Venn-diagram és a logikai szita alkalmazásai. POLYGON, XXII / 1.–2.
12. Tuzson Zoltán (5/1994): A Venn-Euler diagram felhasználása halmazelméleti feladatok-megoldására Matematikai Lapok. Románia Matematikai Tudományos Társulata, 174.-178. oldal