AZ ÁLTALÁNOSÍTOTT KVATERNIÓALGEBRÁK EGY ÚJ FELÉPÍTÉSE

Péntek Kálmán

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Savaria Egyetemi Központ
Savaria Matematikai Tanszék
9700 Szombathely, Károlyi G. tér 4.
e-mail: pentek.kalman@sek.elte.hu

A dolgozatban általánosítjuk az $\mathbb{R}$ test feletti neutrális elemes algebrák megkettőzési eljárását (Dickson 1919), amelynek felhasználásával kiindulva az $\mathbb{R}$ struktúrából felépítjük az általánosított komplex számok $\mathbb{C}_\alpha$ algebráját, majd ennek újfajta megkettőzésével nyerjük az általánosított kvaterniók $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ algebráját. Értelmezzük a szimmetrikus általánosított kvaternióalgebra fogalmát, s meghatározzuk a 9 ilyen struktúra közül a 6 páronként nem izomorf algebrát. Ezek közül 5 a szakirodalomban megtalálható (Rosenfeld 1997), a 6. struktúra legfontosabb algebrai tulajdonságait a dolgozat végén találhatjuk.

Bevezetés

A klasszikus komplex számoknak rendezett valós számpárokból történő egzakt felépítését Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) adta meg 1833-ban (Hamilton 1834, 1837). E struktúrát általánosítva jutott el William Kingdon Clifford (1845-1879) a split komplex számok és a duális komplex számok algebrájához (Clifford 1873).

Közismert, hogy klasszikus komplex számok eredményesen alkalmazhatók síkgeometriai problémák megoldására. Ezért kísérletezett a térgeometriai feladatok hatékony megoldására Hamilton a rendezett valós számhármasok algebrájának megalkotásával. 1843-ban ismerte fel, hogy rendezett valós számnégyesekkel célt érhet és sikeresen megalkotta a valós kvaterniók algebráját (Hamilton 1844, 1847; Ward 1997). Sir James Cockle (1819-1895) e struktúrából kiindulva konstruálta meg a split kvaterniókat (Cockle 1849).

Leonard Eugene Dickson (1874-1954) 1912-ben vezette be egy test feletti általánosított kvaternióalgebra fogalmát (Dickson 1912, 1914, 1923; Pierce 1982). 1919-ben megadta a neutrális elemes algebrák megkettőzési eljárását, amellyel a Hamilton-féle $\mathbb{H}$ valós kvaterniókból kiindulva felépítette az Arthur Cayley (1821-1895) által felfedezett 8 komponensű számok, az $\mathbb{O}$ oktoniók struktúráját (Dickson 1919). Ezt a módszert alkalmazva Dickson tanítványa, Albert, A. A., aki az $\mathbb{R}$ valós test megkettőzésével a $\mathbb{C}$ komplex testhez, majd ennek ismételt megkettőzésével a $\mathbb{H}$ kvaterniók ferdetestéhez jutott el (Praszolov 2005). Ebben a dolgozatban a Cayley-Dickson megkettőzési eljárást általánosítva az $\mathbb{R}$ struktúrából kiindulva először a $\mathbb{C}_\alpha$, majd ebből a $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ struktúrákat építjük fel.

1. Az általánosított komplex számok

Definíció:
Jelölje $\{\mathbb{R},+,\cdot\}$ a valós számok testét, az $\mathbb{R}\times\mathbb{R} := \{(a,b): a,b \in \mathbb{R}\}$ direktszorzatban értelmezzünk műveleteket a következő módon:

(1) skalárral való szorzás: $r\cdot(a,b) := (r\cdot a, r\cdot b)$,
(2) összeadás: $(a,b)+(c,d) := (a+c, b+d)$,
(3) szorzás: $(a,b)\cdot(c,d) := (a\cdot c-\alpha\cdot b\cdot d, a\cdot d+b\cdot c)$,

ahol $r \in \mathbb{R}$, $(a,b),(c,d) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ tetszőlegesek, továbbá $\alpha \in \mathbb{R}$ rögzített valós paraméter!

Látható, hogy az (1) és (2) természetes értelmezése mellett (3) a klasszikus komplex számok szorzási műveletének egy egyszerű általánosítása.

Közvetlen számolással igazolhatjuk a következő tétel helyességét:

1. Tétel:

Az $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ direktszorzat az (1), (2) és (3) műveletekkel egy 2-dimenziós kommutatív, asszociatív és neutrális elemes algebrát alkot az $\mathbb{R}$ test felett.

E struktúra összeadási neutrális elemét a továbbiakban $\mathbf{0} := (0,0)$, a szorzási neutrális elemét $\mathbf{1} := (1,0)$ jelöli. Ezen algebrában, mint egy $\mathbb{R}$ feletti vektortérben természetes bázist alkot az $\mathbf{1} := (1,0)$ és az $\boldsymbol{i} := (0,1)$ elempár.

2. Tétel:

Az $S := \{(a,0): a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ halmaz zárt az (1), (2) és (3) műveletekre nézve.

Bizonyítás:

Ha $r \in \mathbb{R}$ és $(a,0) \in S$, akkor (1) alapján $r\cdot(a,0) = (r\cdot a,0) \in S$. Ha $(a,0),(b,0) \in S$, akkor (2), illetve (3) szerint $(a,0)+(b,0) = (a+b,0) \in S$, továbbá $(a,0)\cdot(b,0) =$ $= (a\cdot b,0) \in S$ is teljesül. □

Az S struktúra tehát egy részalgebrát alkot az $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ algebrában a 2. tétel szerint.

3. Tétel:

Az $f: \mathbb{R} \to S$, $a \mapsto (a,0)$ leképezés egy algebra-izomorfizmus.

Bizonyítás:

Az f egy bijektív leképezés, mert $f^{-1}$is leképezés. Az f egy homogén leképezés: ha $r \in \mathbb{R}$, $(a,0) \in S$, akkor $f(r\cdot a) = (r\cdot a,0) = (r\cdot a, r\cdot 0) = r\cdot(a,0) = r\cdot f(a)$. Az f egy additív leképezés: ha $(a,0),(b,0) \in S$, akkor $f(a+b) = (a+b,0) = (a,0)+(b,0) =$ $= f(a)+f(b)$. Végül f egy multiplikatív leképezés: ha $(a,0),(b,0) \in S$, akkor $f(a\cdot b) =$. $= (a\cdot b,0) = (a,0)\cdot(b,0) = f(a)\cdot f(b)$□

Az f izomorfizmus felhasználásával cseréljük ki az $S \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ részstruktúrát az $\mathbb{R}$ struktúrára, ezzel az $(a,0) \in S$ elempár a továbbiakban azonosítható lesz az $a \in \mathbb{R}$ elemmel.

4. Következmény:

Az $f^*:\mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}, a \mapsto (a, 0)$ leképezés egy algebra-monomorfizmus, amellyel az $\mathbb{R}$ beleágyazható az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ algebrába.

Definíció:

A beágyazás eredményeként kapott struktúrát a $\mathbb{C}_\alpha$ szimbólummal jelöljük és az *általánosított komplex számok* algebrájának nevezzük.

Ha $\alpha = 1$, akkor a *klasszikus* Gauss-féle *komplex számok* $\mathbb{C}$, ha $\alpha = 0$, akkor a *duális komplex számok* $\mathbb{C}^{\circ}$, végül ha $\alpha = -1$, akkor a *split komplex számok* $\mathbb{C}^{'}$ algebrájához juthatunk (Clifford,1873). E struktúrákat részletesen tárgyalja Rosenfeld (1997) monográfiája.

5. Tétel:

Minden $\mathbb{R}$ feletti 2-dimenziós asszociatív algebra izomorf az α paraméter 1, 0, vagy -1 értékéhez tartozó $\mathbb{C}_\alpha$ valamelyikével.

Bizonyítás:

A tétel bizonyítását Kantor-Szolodovnyikov (1986) és Rosenfeld (1997) műve tartalmazza. □

6. Tétel:

Az $\boldsymbol{i} = (0,1) \in \mathbb{C}_\alpha$ elemre érvényesek az alábbi összefüggések:

(a) $\boldsymbol{i}^2 = -\alpha$,

(b) $(0,b) = b \cdot \boldsymbol{i}$,

(c) minden $(a, b) \in \mathbb{C}_\alpha$ felírható $a + b \cdot \boldsymbol{i}$ alakban.

Bizonyítás:

A (3) felhasználásával $\boldsymbol{i}^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (0 \cdot 0 - \alpha \cdot 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-\alpha, 0)$, amely azonosítható a $-\alpha \in \mathbb{R}$ elemmel.

Szintén a (3) alkalmazásával $b \cdot \boldsymbol{i} = (b,0) \cdot (0,1) = (b \cdot 0 - \alpha \cdot 0 \cdot 1, b \cdot 1 + 0 \cdot 0) = (0, b)$ adódik, amely a b) helyességét bizonyítja.

A (2), (3) és a b) alapján $(a, b) = (a, 0) + (0, b)$, amely azonosítható az $a + b \cdot \boldsymbol{i} \in \mathbb{C}_\alpha$ elemmel. □

Definíció:

A (c) pontban szereplő előállítást az általánosított komplex szám *algebrai alakjának* nevezzük.

Az (1), (2), (3) és a 6. tétel (c) pontja alapján az általánosított komplex számok algebrai alakjával a következő számolási szabályok alapján dolgozhatunk:

7. Tétel:
Ha $r \in \mathbb{R}, a + b \cdot \boldsymbol{i}$, $c + d \cdot \boldsymbol{i} \in \mathbb{C}_\alpha$ tetszőleges elemek, akkor

(4) $$r \cdot (a + b \cdot \boldsymbol{i}) = (r \cdot a) + (r \cdot b) \cdot \boldsymbol{i} \,,$$
(5) $$(a + b \cdot \boldsymbol{i}) + (c + d \cdot \boldsymbol{i}) = (a + c) + (b + d) \cdot \boldsymbol{i} \,,$$
(6) $$(a + b \cdot \boldsymbol{i}) \cdot (c + d \cdot \boldsymbol{i}) = (a \cdot c - \alpha \cdot b \cdot d) + (a \cdot d + b \cdot c) \cdot \boldsymbol{i} \,.$$

A 6. tétel (a) pontja szerint a (6) összefüggés átírható az alábbi formába is:

(7) $$(a + b \cdot \boldsymbol{i}) \cdot (c + d \cdot \boldsymbol{i}) = (a \cdot c + \boldsymbol{i}^2 \cdot b \cdot d) + (a \cdot d + b \cdot c)\boldsymbol{i} \,,$$

ennek alapján az általánosított komplex számokkal is úgy dolgozhatunk, mint valós kéttagú kifejezésekkel.

Definíció:

A $z = a + b \cdot \boldsymbol{i} \in \mathbb{C}_\alpha$ *konjugáltján* a $\bar{z} := a - b \cdot \boldsymbol{i} \in \mathbb{C}_\alpha$ általánosított komplex számot értjük. Egyszerű számolással igazolhatjuk a konjugálás tulajdonságait rögzítő alábbi állítást:

8. Tétel:
Ha $r \in \mathbb{R},\ z = a + b \cdot \boldsymbol{i},\ t = c + d \cdot \boldsymbol{i} \in \mathbb{C}_\alpha$ tetszőleges elemek, akkor

(a) $\bar{\bar{z}} = z$ involutív,
(b) $\overline{r \cdot z} = r \cdot \bar{z}$ homogén,
(c) $\overline{z + t} = \bar{z} + \bar{t}$ additív,
(d) $\overline{z \cdot t} = \bar{z} \cdot \bar{t}$ multiplikatív.
(e) $z \cdot \bar{z} = \bar{z} \cdot z = a^2 + \alpha \cdot b^2 \in \mathbb{R}$

Definíció:

A $z = a + b \cdot \boldsymbol{i} \in \mathbb{C}_\alpha$ általánosított komplex szám *normáján* az $N(z) := a^2 + \alpha \cdot b^2 \in \mathbb{R}$ valós számot értjük.

Az $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}_\alpha$ struktúrák algebrai tulajdonságai, valamint a 8. tétel (d) pontja alapján könnyen adódik a következő eredmény:

9. Tétel:
Tetszőleges $z, t \in \mathbb{C}_\alpha$ általánosított komplex számokra teljesül:

(8) $$N(z \cdot t) = N(z) \cdot N(t) \,.$$

10. Tétel:
A $z \in \mathbb{C}_\alpha$ invertálható elem akkor és csakis akkor, ha $N(z) \neq 0$.

Bizonyítás:

Ha $N(z) \neq 0$, akkor $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{N(z)} \in \mathbb{C}_\alpha$, mert a 8. tétel (e) pontja szerint teljesül rá a $z \cdot z^{-1} == z^{-1} \cdot z = \mathbf{1}$ összefüggés. Ha pedig $N(z) = 0$, akkor $z \cdot \bar{z} = \bar{z} \cdot z = N(z) = 0$ miatt $z \in \mathbb{C}_\alpha$ zérusosztó, vagyis nem invertálható. □

11. Tétel:

Ha $z, t \in \mathbb{C}_\alpha$ invertálható elemek, akkor $z \cdot t \in \mathbb{C}_\alpha$ is invertálható és $(z \cdot t)^{-1} = z^{-1} \cdot t^{-1}$.

Bizonyítás:

A 10. tétel szerint most $N(z) \neq 0$ és $N(t) \neq 0$, a 9. tétel alapján ekkor $N(z \cdot t) \neq 0$ teljesül, ezért ismét a 10. tétel miatt $z \cdot t \in \mathbb{C}_\alpha$ is invertálható. A 8. tétel (d) pontja, a 9. és 10. tétel felhasználásával ekkor

$$(z \cdot t)^{-1} = \frac{\overline{z \cdot t}}{N(z \cdot t)} = \frac{\bar{z} \cdot \bar{t}}{N(z) \cdot N(t)} = \frac{\bar{z}}{N(z)} \cdot \frac{\bar{t}}{N(t)} = z^{-1} \cdot t^{-1}. \square$$

Definíció:

A $z = a + b \cdot \boldsymbol{i}, t = c + d \cdot \boldsymbol{i} \in \mathbb{C}_\alpha$elempár *skaláris szorzatán* a $\langle z, t \rangle := a \cdot c + \alpha \cdot b \cdot d \in \mathbb{R}$ valós számot értjük.

Egyszerű közvetlen számolással igazolhatjuk a skaláris szorzat következő tulajdonságait:

12. Tétel:

A $B: \mathbb{C}_\alpha \times \mathbb{C}_\alpha \to \mathbb{R}, (z, t) \mapsto \langle z, t \rangle$ egy szimmetrikus bilineáris leképezés: tetszőleges $r \in \mathbb{R}$, $z, t, v \in \mathbb{C}_\alpha$ esetén

(a) $\langle z, t \rangle = \langle t, z \rangle$ kommutatív,
(b) $\langle r \cdot z, t \rangle = \langle z, r \cdot t \rangle = r \cdot \langle z, t \rangle$ homogén,
(c) $\langle z + v, t \rangle = \langle z, t \rangle + \langle v, t \rangle$ disztributív az összeadásra nézve.

Megjegyezzük, hogy a skaláris szorzat általában egy indefinit bilineáris leképezés, amely csupán az $\alpha = 1$ értékhez tartozó $\mathbb{C}$ klasszikus komplex test esetén lesz pozitív definit.

Látható, hogy egy általánosított komplex szám normája a skaláris szorzatból származtatható, mert a norma és a skaláris szorzat értelmezése miatt ha $z \in \mathbb{C}_\alpha$, akkor $N(z) = \langle z, z \rangle$ teljesül.

Legyen $M_2(\mathbb{R})$ az $\mathbb{R}$ valós test feletti másodrendű négyzetes mátrixok 4-dimenziós teljes mátrixalgebrája! Rendeljük hozzá a $z = a + b \cdot \boldsymbol{i} \in \mathbb{C}_\alpha$ általánosított komplex számhoz azt az $A \in M_2(\mathbb{R})$ mátrixot, amelyre

(9) $$\begin{pmatrix} \boldsymbol{1} \cdot z \\ \boldsymbol{i} \cdot z \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{i} \end{pmatrix}$$

teljesül. Mivel (1) és (3) alapján $\boldsymbol{1} \cdot z = \boldsymbol{1} \cdot (a + b \cdot \boldsymbol{i}) = a + b \cdot \boldsymbol{i}$ és

$\boldsymbol{i} \cdot z = \boldsymbol{i} \cdot (a + b \cdot \boldsymbol{i}) = -\alpha \cdot b + a \cdot \boldsymbol{i}$, ezért

(10) $$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\alpha \cdot b & a \end{pmatrix}$$

teljesül (Kaluzsnyin 1979). Jelölje az ilyen alakú mátrixok halmazát a továbbiakban $M_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$!

13. Tétel:

Az $M_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ mátrixok részalgebrát alkotnak az $M_2(\mathbb{R})$ teljes mátrixalgebrában.

Bizonyítás:

Ha $r \in \mathbb{R}, A, B \in M_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, akkor egyszerű közvetlen számítással igazolhatjuk, hogy $r \cdot A, A \pm B,\ A \cdot B \in M_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, így $M_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ valóban egy részalgebrát alkot az $M_2(\mathbb{R})$ teljes mátrixalgebrában. □

14. Tétel:

A $g: \mathbb{C}_\alpha \to M_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}), a + b \cdot \boldsymbol{i} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -\alpha \cdot b & a \end{pmatrix}$ egy algebra-izomorfizmus.

Bizonyítás:

A g egy bijektív leképezés, mert $g^{-1}$is leképezés. Ha $r \in \mathbb{R}, z = a + b \cdot \boldsymbol{i},\ t = c + d \cdot \boldsymbol{i} \in \mathbb{C}_\alpha$ akkor

$g(r \cdot z) = g\big(r \cdot (a + b \cdot \boldsymbol{i})\big) = r \cdot g(z)$, így g egy homogén leképezés.

$g(z + t) = g\big((a + b \cdot \boldsymbol{i}) + (c + d \cdot \boldsymbol{i})\big) = g(z) + g(t)$, így a g egy additív leképezés.

$g(z \cdot t) = g\big((a + b \cdot \boldsymbol{i}) \cdot (c + d \cdot \boldsymbol{i})\big) = g(z) \cdot g(t)$, ezért a g egy multiplikatív leképezés. □

A $g(\mathbf{1}) = g(1 + 0 \cdot \boldsymbol{i}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ és $g(\boldsymbol{i}) = g(0 + 1 \cdot \boldsymbol{i}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}$ alkotja $M_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ algebra természetes bázisát.

Ha $z = a + b \cdot \boldsymbol{i} \in \mathbb{C}_\alpha$ akkor könnyen belátható, hogy $g(\bar{z}) = g(a - b \cdot \boldsymbol{i}) = \begin{pmatrix} a & -b \\ \alpha \cdot b & a \end{pmatrix}$.

15. Következmény:

Az $M_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ egy 2-dimenziós kommutatív, asszociatív, neutrális elemes részalgebrát alkot az $M_2(\mathbb{R})$ 4-dimenziós teljes mátrixalgebrában.

Megjegyezzük, hogy 14. tétel és annak 15. következménye együtt egy új bizonyítását adják az 1. tételnek.

A 14. tétel alapján azonnal adódik a következő állítás:

16. Következmény:

A $g^* : \mathbb{C}_\alpha \to M_2(\mathbb{R}), a + b \cdot \boldsymbol{i} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -\alpha \cdot b & a \end{pmatrix}$ egy algebra-monomorfizmus.

17. Tétel:

Ha $z = a + b \cdot \boldsymbol{i} \in \mathbb{C}_\alpha$, akkor $N(z) = det \begin{pmatrix} a & b \\ -\alpha \cdot b & a \end{pmatrix}$.

Bizonyítás:

$det \begin{pmatrix} a & b \\ -\alpha \cdot b & a \end{pmatrix} = a^2 - (-\alpha \cdot b) \cdot b = a^2 + \alpha \cdot b^2 = N(a + b \cdot \boldsymbol{i}) = N(z).$ □

2. Az általánosított kvaterniók

Definíció:

Az általánosított komplex számok $\mathbb{C}_\alpha$ 2-dimenziós, kommutatív és asszociatív algebrájából kiindulva a $\mathbb{C}_\alpha \times \mathbb{C}_\alpha := \{(z_1, z_2) \colon z_1, z_2 \in \mathbb{C}_\alpha\}$ direktszorzatban értelmezzünk műveleteket a következő módon:

(11) skalárral való szorzás: $r \cdot (z_1, z_2) := (r \cdot z_1, r \cdot z_2)$,
(12) összeadás: $(z_1, z_2) + (w_1, w_2) := (z_1 + w_1, z_2 + w_2)$,
(13) szorzás: $(z_1, z_2) \cdot (w_1, w_2) := (z_1 \cdot w_1 - \beta \cdot z_2 \cdot \overline{w_2}, z_1 \cdot w_2 + z_2 \cdot \overline{w_1})$,

ahol $r \in \mathbb{R}$, $(z_1, z_2), (w_1, w_2) \in \mathbb{C}_\alpha \times \mathbb{C}_\alpha$ tetszőlegesek, továbbá $\beta \in \mathbb{R}$ egy rögzített valós paraméter!

Látható, hogy (11) és (12) természetes értelmezése mellett (13) a Cayley-Dickson-féle megkettőzési eljárás egy természetes általánosítása.

Az 1. tétel mintájára, azzal analóg módon közvetlen, bár hosszadalmas számolással igazolhatjuk a következő tétel érvényességét:

18. Tétel:

A $\mathbb{C}_\alpha \times \mathbb{C}_\alpha$ direktszorzat a (11), (12) és (13) műveletekkel egy 4-dimenziós, nem kommutatív, de asszociatív és neutrális elemes algebrát alkot az $\mathbb{R}$ test felett.

Ebben a struktúrában az összeadás neutrális eleme $(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = (0 + 0 \cdot \boldsymbol{i}, 0 + 0 \cdot \boldsymbol{i})$, a szorzás neutrális eleme $(\mathbf{1}, \mathbf{0}) = (1 + 0 \cdot \boldsymbol{i}, 0 + 0 \cdot \boldsymbol{i})$. Ezen algebrában, mint egy $\mathbb{R}$ feletti 4-dimenziós vektortérben természetes bázist alkot az

$(\mathbf{1}, \mathbf{0}) = (1 + 0 \cdot \boldsymbol{i}, 0 + 0 \cdot \boldsymbol{i})$, $\quad (\boldsymbol{i}, \mathbf{0}) = (0 + 1 \cdot \boldsymbol{i}, 0 + 0 \cdot \boldsymbol{i})$,

$\boldsymbol{j} := (\mathbf{0}, \mathbf{1}) = (0 + 0 \cdot \boldsymbol{i}, 1 + 0 \cdot \boldsymbol{i}), (\mathbf{0}, \boldsymbol{i}) = (0 + 0 \cdot \boldsymbol{i}, 0 + 1 \cdot \boldsymbol{i})$

rendszer az 1. tétel után tett jelölésekkel összhangban.

19. Tétel:

A $T := \{(z_1, \mathbf{0}) \colon z_1 \in \mathbb{C}_\alpha\} \subset \mathbb{C}_\alpha \times \mathbb{C}_\alpha$ halmaz zárt a (11), (12) és a (13) műveletekre nézve.

Bizonyítás:

Ha $r \in \mathbb{R}$ és $(z_1, \mathbf{0}) \in T$, akkor a (11) szerint $r \cdot (z_1, \mathbf{0}) = (r \cdot z_1, \mathbf{0}) \in T$. Ha most $(z_1, \mathbf{0}), (w_1, \mathbf{0}) \in T$, akkor (12), valamint (13) szerint $(z_1, \mathbf{0}) + (w_1, \mathbf{0}) = (z_1 + w_1, \mathbf{0}) \in T$ és $(z_1, \mathbf{0}) \cdot (w_1, \mathbf{0}) = (z_1 \cdot w_1, \mathbf{0}) \in T$ is teljesül. □

A T struktúra tehát részalgebrát alkot a $\mathbb{C}_\alpha \times \mathbb{C}_\alpha$ algebrában a 19. tétel miatt.

20. Tétel:
Az $F: \mathbb{C}_\alpha \to T, z_1 \mapsto (z_1, \mathbf{0})$ leképezés egy algebra-izomorfizmus.

Bizonyítás:

Az F egy bijektív leképezés, hiszen $F^{-1}$is egy leképezés. Az F egy homogén leképezés: ha az $r \in \mathbb{R}$ és $(z_1, \mathbf{0}) \in T$, akkor $F(r \cdot z_1) = (r \cdot z_1, \mathbf{0}) = r \cdot (z_1, \mathbf{0}) = r \cdot F(z_1)$. Az F egy additív leképezés: ha $(z_1, \mathbf{0}), (w_1, \mathbf{0}) \in T$, akkor $F(z_1 + w_1) = (z_1 + w_1, \mathbf{0}) = (z_1, \mathbf{0}) + (w_1, \mathbf{0}) = = F(z_1) + F(w_1)$. Végül F egy multiplikatív leképezés is: ha $(z_1, \mathbf{0}), (w_1, \mathbf{0}) \in T$, akkor $F(z_1 \cdot w_1) = (z_1 \cdot w_1, \mathbf{0}) = (z_1, \mathbf{0}) \cdot (w_1, \mathbf{0}) = F(z_1) \cdot F(w_1)$. □

Az F izomorfizmust alkalmazva cseréljük ki a $T \subset \mathbb{C}_\alpha \times \mathbb{C}_\alpha$ részstruktúrát a $\mathbb{C}_\alpha$ struktúrára, aminek eredményeként a továbbiakban a $(z_1, 0)$ elempár azonosítható a $z_1 \in \mathbb{C}_\alpha$elemmel.

21. Következmény:
Az$F^*: \mathbb{C}_\alpha \to \mathbb{C}_\alpha \times \mathbb{C}_\alpha, z_1 \mapsto (z_1, 0)$ leképzés egy algebra-monomorfizmus, amellyel a $\mathbb{C}_\alpha$ beleágyazható a $\mathbb{C}_\alpha \times \mathbb{C}_\alpha$ algebrába.

Definíció:

A beágyazás eredményeként nyert struktúrát a $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ szimbólummal jelöljük és *általánosított kvaternióalgebrának* nevezzük. Néhány speciális $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ struktúrát említünk az alábbiakban:

Ha $(\alpha, \beta) = (1,1)$, akkor a $\mathbb{H}$ klasszikus Hamilton-féle kvaterniók algebrájához juthatunk el.

Ha $(\alpha, \beta) = (1, -1)$, akkor a $\mathbb{H}'$ *split kvaterniók* algebráját nyerjük.

Ha $(\alpha, \beta) = (1,0)$, akkor kapjuk a $\mathbb{H}^{\circ}$ *szemi kvaterniók* algebráját.

Ha $(\alpha, \beta) = (-1,0)$, akkor a $\mathbb{H}^{\circ\prime}$*split szemi kvaterniók* algebráját nyerhetjük.

Ha $(\alpha, \beta) = (0,0)$, akkor kaphatjuk a $\mathbb{H}^{\circ\circ}$ *kvázi kvaterniók* algebráját.

E struktúrák algebrai tulajdonságait vizsgálja Rosenfeld (1997) monográfiája, továbbá idecsatlakozik Jafari-Yayli (2015) és Jafari (2016) tanulmánya is.

22. Tétel:
A $\boldsymbol{j} = (\mathbf{0}, \mathbf{1}) \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ elemre érvényesek a következő összfüggések:

(a) $\boldsymbol{j}^2 = -\beta$,
(b) $(\mathbf{0}, z_2) = z_2 \cdot \boldsymbol{j}$,
(c) minden $(z_1, z_2) \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ felírható $z_1 + z_2 \cdot \boldsymbol{j}$ alakban.
Bizonyítás:

A (13) felhasználásával $\boldsymbol{j}^2 = (\mathbf{0}, \mathbf{1}) \cdot (\mathbf{0}, \mathbf{1}) = (\mathbf{0} \cdot \mathbf{0} - \beta \cdot \mathbf{1} \cdot \overline{\mathbf{1}}, \mathbf{0} \cdot \mathbf{1} + \mathbf{1} \cdot \overline{\mathbf{0}}) = (-\beta \cdot \mathbf{1}, \mathbf{0})$, ami az F^{-1}leképezés alkalmazásával azonosítható a $-\beta \cdot \mathbf{1}$ elemmel, amely viszont az f^{-1}leképezés felhasználásával a $-\beta \in \mathbb{R}$ elemmel azonosítható.

Ugyancsak a (13) és az F leképezés alkalmazásával $z_2 \cdot \boldsymbol{j} = (z_2, \mathbf{0}) \cdot (\mathbf{0}, \mathbf{1}) = (z_2 \cdot \mathbf{0} - -\beta \cdot \mathbf{0} \cdot \overline{\mathbf{1}},\ z_2 \cdot \mathbf{1} + \mathbf{0} \cdot \overline{\mathbf{0}}) = (\mathbf{0}, z_2)$, ami a b) pont igaz voltát bizonyítja.

A (12), (13) és a b) alapján $(z_1, z_2) = (z_1, 0) + (0, z_2)$, amely elem viszont azonosítható az F^{-1}leképezés alapján a $z_1 + z_2 \cdot \boldsymbol{j} \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ elemmel. □

A c) pontban található előállítást az általánosított kvaternió *komplex algebrai alakjának* nevezzük.

A (11), (12), (13), valamint a 22. tétel c) pontja alapján az általánosított kvaterniók komplex algebrai alakjával az alábbi számolási szabályok szerint számolhatunk:

23. Tétel:

Ha $r \in \mathbb{R}, z_1 + z_2 \cdot \boldsymbol{j}, w_1 + w_2 \cdot \boldsymbol{j} \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ tetszőleges elemek, akkor

(14) $\quad r \cdot (z_1 + z_2 \cdot \boldsymbol{j}) = (r \cdot z_1) + (r \cdot z_2) \cdot \boldsymbol{j}$,

(15) $\quad (z_1 + z_2 \cdot \boldsymbol{j}) + (w_1 + w_2 \cdot \boldsymbol{j}) = (z_1 + w_1) + (z_2 + w_2) \cdot \boldsymbol{j}$,

(16) $\quad (z_1 + z_2 \cdot \boldsymbol{j}) \cdot (w_1 + w_2 \cdot \boldsymbol{j}) = (z_1 \cdot w_1 - \beta \cdot z_2 \cdot \overline{w_2}) + (z_1 \cdot w_2 + z_2 \cdot \overline{w_1})\boldsymbol{j}$.

A 22. tétel a) része alapján a (16) összefüggés a következő formába írható át:

(17) $\quad (z_1 + z_2 \cdot \boldsymbol{j}) \cdot (w_1 + w_2 \cdot \boldsymbol{j}) = (z_1 \cdot w_1 + \boldsymbol{j}^2 \cdot z_2 \cdot \overline{w_2}) + (z_1 \cdot w_2 + z_2 \cdot \overline{w_1})\boldsymbol{j}$.

Ez alapján az általános kvaterniókkal is úgy dolgozhatunk, mint valós kéttagú kifejezésekkel.

24. Következmény:

Ha $w_1 \in \mathbb{C}_\alpha$, akkor érvényes a $\boldsymbol{j} \cdot w_1 = \overline{w_1} \cdot \boldsymbol{j}$ összefüggés.

Bizonyítás:

A (16), illetve (17) összefüggésből a $z_1 = \mathbf{0},\ z_2 = \mathbf{1}, w_1 \in \mathbb{C}_\alpha, w_2 = \mathbf{0}$ speciális értékadással közvetlenül adódik az állítás. □

25. Következmény:

$\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{i} = -\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j}$

Bizonyítás:

A 24. következményből a $w_1 = 0 + 1 \cdot \boldsymbol{i}$ speciális értékadással $\overline{w_1} = 0 - 1 \cdot \boldsymbol{i}$ miatt azonnal következik az állítás. □

26. Tétel:

Ha $z_1 = a + b \cdot \boldsymbol{i}, z_2 = c + d \cdot \boldsymbol{i} \in \mathbb{C}_\alpha$ és $q = z_1 + z_2 \cdot \boldsymbol{j} \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$, akkor a q általánosított kvaternió felírható $q = a + b \cdot \boldsymbol{i} + c \cdot \boldsymbol{j} + d \cdot \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j}$ alakban.

Bizonyítás:

A 22. tétel b) pontja a $z_2 = 0 + 1 \cdot \boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}$ értékadással $(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{i}) = \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j}$ alakot ölti. Ekkor $q = \quad = (z_1, z_2) = (z_1, \boldsymbol{0}) + (\boldsymbol{0}, z_2) = \big((a,b), \boldsymbol{0}\big) + \big(\boldsymbol{0}, (c,d)\big) = \big((a,0) + (0,b), \boldsymbol{0}\big) + \big(\boldsymbol{0}, (c,0) + (0,d)\big) = \big((a,0), \boldsymbol{0}\big) + \big((0,b), \boldsymbol{0}\big) + \big(\boldsymbol{0}, (c,0)\big) + \big(\boldsymbol{0}, (0,d)\big) = a \cdot (\boldsymbol{1}, \boldsymbol{0}) + b(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{0}) + c \cdot (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}) + d(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{i}) = a \cdot \boldsymbol{1} + b \cdot \boldsymbol{i} + c \cdot \boldsymbol{j} + d \cdot \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j}$

Adódik az iménti észrevétel, a $\boldsymbol{j}$ elem értelmezése és az F^{-1} leképezés felhasználásával. Végül az $a \cdot \boldsymbol{1}$ tag az f^{-1} felhasználásával azonosítható az $a \in \mathbb{R}$ elemmel. □

Legyen $\boldsymbol{k} := \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j}$, amelynek alapján tehát minden $q \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ a fentiek alapján felírható

(18) $$q = a + b \cdot \boldsymbol{i} + c \cdot \boldsymbol{j} + d \cdot \boldsymbol{k}$$ alakban.

Definíció:

A $q \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ (18) előállítást az általánosított kvaternió *valós algebrai alakjának* hívjuk, az $\boldsymbol{1}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k} \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ elemeket pedig *általánosított kvaternióegységeknek* nevezzük.

Megjegyezzük, hogy a 16. tétel bizonyítása után említett, $\mathbb{C}_\alpha \times \mathbb{C}_\alpha$ struktúra bázisának 4 eleme rendre megfeleltethetőek az általánosított kvaternióegységeknek az F^{-1}, illetve az f^{-1} leképezések segítségével.

27. Tétel:

A kvaternióegységek szorzási Cayley-féle műveleti táblázata a következő alakú:

$\cdot$	$\boldsymbol{1}$	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{1}$	$\boldsymbol{1}$	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{i}$	$-\alpha$	$\boldsymbol{k}$	$-\alpha \cdot \boldsymbol{j}$
$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{j}$	$-\boldsymbol{k}$	$-\beta$	$\beta \cdot \boldsymbol{i}$
$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{k}$	$\alpha \cdot \boldsymbol{j}$	$-\beta \cdot \boldsymbol{i}$	$-\alpha \cdot \beta$

Bizonyítás:

$\boldsymbol{1} = (\boldsymbol{1}, \boldsymbol{0}) \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ a struktúra szorzási neutrális eleme, ezért érvényesek az $\boldsymbol{1} \cdot \boldsymbol{1} = \boldsymbol{1}, \boldsymbol{1} \cdot \boldsymbol{i} = = \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{1} = \boldsymbol{i}, \boldsymbol{1} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{1} = \boldsymbol{j}$ és $\boldsymbol{1} \cdot \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{1} = \boldsymbol{k}$ összefüggések.

A 6. tétel a) pontja szerint $\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} = -\alpha$, a 22. tétel a) pontja szerint pedig $\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{j} = -\beta$.

A 25. következmény alapján $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k} = (\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j}) \cdot (\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j}) = \boldsymbol{i} \cdot (\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{i}) \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{i} \cdot (-\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j}) \cdot \boldsymbol{j} = -(\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i}) \cdot \cdot (\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{j}) = -(-\alpha) \cdot (-\beta) = = -\alpha \cdot \beta$ teljesül.

Szintén a 25. következmény szerint adódik $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}$ és $\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{k}$. Érvényesek még az

$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}\cdot(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j})=(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i})\cdot\boldsymbol{j}=(-\alpha)\cdot\boldsymbol{j}=-\alpha\cdot\boldsymbol{j}$ és $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j})\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{i}\cdot(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i})=$ $=\boldsymbol{i}\cdot(-\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j})=-(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i})\cdot\boldsymbol{j}=-(-\alpha)\cdot\boldsymbol{j}=\alpha\cdot\boldsymbol{j}$, valamint a

$\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{j}\cdot(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j})=(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i})\cdot\boldsymbol{j}=(-\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j})\cdot\boldsymbol{j}=(-\boldsymbol{i})\cdot(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j})=(-\boldsymbol{i})\cdot(-\beta)=\beta\cdot\boldsymbol{i}$ és $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}=(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j})\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}\cdot(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j})=\boldsymbol{i}\cdot(-\beta)=-\beta\cdot\boldsymbol{i}$ összefüggések, amivel az állítást igazoltuk. □

A 23. tétel (14), (15) és (16) összefüggéseit, valamint a 26. tételt és a (18) előállítást felhasználva adódnak a valós algebrai alakkal való számolás szabályai:

28. tétel:

Ha $r\in\mathbb{R}, z_1=a+b\cdot\boldsymbol{i}, z_2=c+d\cdot\boldsymbol{i}, w_1=a'+b'\cdot\boldsymbol{i}, w_2=c'+d'\cdot\boldsymbol{i}\in\mathbb{C}_\alpha$ és $q=z_1++z_2\cdot\boldsymbol{j}, q'=w_1+w_2\cdot\boldsymbol{j}\in\mathbb{H}_{\alpha\beta}$, akkor

(19) skalárral való szorzás:

$$r\cdot q=r\cdot(a+b\cdot\boldsymbol{i}+c\cdot\boldsymbol{j}+d\cdot\boldsymbol{k})=(r\cdot a)+(r\cdot b)\cdot\boldsymbol{i}+(r\cdot c)\cdot\boldsymbol{j}+(r\cdot d)\cdot\boldsymbol{k}$$

(20) összeadás:

$$q+q'=(a+b\cdot\boldsymbol{i}+c\cdot\boldsymbol{j}+d\cdot\boldsymbol{k})+(a'+b'\cdot\boldsymbol{i}+c'\cdot\boldsymbol{j}+d'\cdot\boldsymbol{k})=$$
$$=(a+a')+(b+b')\cdot\boldsymbol{i}+(c+c')\cdot\boldsymbol{j}+(d+d')\cdot\boldsymbol{k}$$

(21) szorzás:

$$q\cdot q'=(a+b\cdot\boldsymbol{i}+c\cdot\boldsymbol{j}+d\cdot\boldsymbol{k})\cdot(a'+b'\cdot\boldsymbol{i}+c'\cdot\boldsymbol{j}+d'\cdot\boldsymbol{k})=$$
$$=(a\cdot a'-\alpha\cdot b\cdot b'-\beta\cdot c\cdot c'-\alpha\cdot\beta\cdot d\cdot d')+$$
$$+(a\cdot b'+b\cdot a'+\beta\cdot c\cdot d'-\beta\cdot d\cdot c')\cdot\boldsymbol{i}+$$
$$+(a\cdot c'-\alpha\cdot b\cdot d'+c\cdot a'+\alpha\cdot d\cdot b')\cdot\boldsymbol{j}+$$
$$+(a\cdot d'+b\cdot c'-c\cdot b'+d\cdot a')\cdot\boldsymbol{k}\,.$$

Definíció:

A $q=z_1+z_2\cdot\boldsymbol{j}\in\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ *konjugáltján* a $\bar{q}:=\bar{z_1}-z_2\cdot\boldsymbol{j}\in\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ általánosított kvaterniót értjük.

Ha $z_1=a+b\cdot\boldsymbol{i},\ z_2=c+d\cdot\boldsymbol{i}\in\mathbb{C}_\alpha$, akkor $\bar{q}=a-b\cdot\boldsymbol{i}-c\cdot\boldsymbol{j}-d\cdot\boldsymbol{k}\in\mathbb{H}_{\alpha\beta}$.

Egyszerű számolással láthatjuk be, hogy konjugált képzésére teljesülnek az alábbi összefüggések:

29. Tétel:

Ha $r\in\mathbb{R}, q=z_1+z_2\cdot\boldsymbol{j}, q'=w_1+w_2\cdot\boldsymbol{j}\in\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ tetszőleges elemek, akkor

(a) $\bar{\bar{q}}=q$ involutív,
(b) $\overline{r\cdot q}=r\cdot\bar{q}$ homogén,
(c) $\overline{q+q'}=\bar{q}+\bar{q'}$ additív,

(d) $\overline{q \cdot q'} = \overline{q'} \cdot \overline{q}$ anti-multiplikatív.

30. Tétel:
Ha $q = z_1 + z_2 \cdot \boldsymbol{j} \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$, $z_1 = a + b \cdot \boldsymbol{i}, z_2 = c + d \cdot \boldsymbol{i} \in \mathbb{C}_\alpha$ akkor

$q \cdot \bar{q} = \bar{q} \cdot q = z_1 \cdot \overline{z_1} + \beta \cdot z_2 \cdot \overline{z_2} = a^2 + \alpha \cdot b^2 + \beta \cdot c^2 + \alpha \cdot \beta \cdot d^2 \in \mathbb{R}$

Bizonyítás:

$$q \cdot \bar{q} = (z_1 + z_2 \cdot \boldsymbol{j}) \cdot (\overline{z_1} - z_2 \cdot \boldsymbol{j}) = \left(z_1 \cdot \overline{z_1} - \beta \cdot z_2 \cdot \overline{(-z_2)}\right) + (z_1 \cdot (-z_2) + z_2 \cdot \overline{\overline{z_1}}) \cdot \boldsymbol{j} =$$
$$= (z_1 \cdot \overline{z_1} + \beta \cdot z_2 \cdot \overline{z_2}) + (-z_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot z_1) \cdot \boldsymbol{j} = (z_1 \cdot \overline{z_1} + \beta \cdot z_2 \cdot \overline{z_2}) + 0 \cdot \boldsymbol{j}$$
, továbbá analóg számolással $\bar{q} \cdot q = (z_1 \cdot \overline{z_1} + \beta \cdot z_2 \cdot \overline{z_2}) + 0 \cdot j$ is adódik, amely az F^{-1} felhasználásával azonosítható a $z_1 \cdot \overline{z_1} + \beta \cdot z_2 \cdot \overline{z_2} \in \mathbb{C}_\alpha$ elemmel. Ekkor

$$z_1 \cdot \overline{z_1} + \beta \cdot z_2 \cdot \overline{z_2} = (a + b \cdot \boldsymbol{i}) \cdot (a - b \cdot \boldsymbol{i}) + \beta \cdot (c + d \cdot \boldsymbol{i}) \cdot (c - d \cdot \boldsymbol{i}) = \big((a^2 + \alpha \cdot b^2) +$$
$$+(-a \cdot b + b \cdot a) \cdot \boldsymbol{i}\big) + \beta \cdot \big((c^2 + \alpha \cdot d^2) + (-c \cdot d + d \cdot c) \cdot \boldsymbol{i}\big) = \big((a^2 + \alpha \cdot b^2) +$$
$$+\beta \cdot (c^2 + \alpha \cdot d^2)\big) + 0 \cdot \boldsymbol{i} = (a^2 + \alpha \cdot b^2 + \beta \cdot c^2 + \alpha \cdot \beta \cdot d^2) + 0 \cdot \boldsymbol{i}$$

amely viszont az f^{-1}alkalmazásával azonosítható az $a^2 + \alpha \cdot b^2 + \beta \cdot c^2 + \alpha \cdot \beta \cdot d^2 \in \mathbb{R}$ számmal. □

Definíció:

A $q \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ általánosított kvaternió *normáján* a $N(q) := q \cdot \bar{q} \in \mathbb{R}$ valós számot értjük.

31. Tétel:
Ha $q, q' \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$, akkor $N(q \cdot q') = N(q) \cdot N(q')$.

Bizonyítás:

Az $\mathbb{R}, \mathbb{C}_\alpha$ és $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ struktúrák algebrai tulajdonságai, továbbá a 29. tétel d) pontja szerint:

$$N(q \cdot q') = (q \cdot q') \cdot (\overline{q \cdot q'}) = (q \cdot q') \cdot (\overline{q'} \cdot \bar{q}) = q \cdot (q' \cdot \overline{q'}) \cdot \bar{q} = q \cdot N(q') \cdot \bar{q} =$$
$$= N(q') \cdot q \cdot \bar{q} = N(q') \cdot N(q) = N(q) \cdot N(q') .□$$

32. Tétel:
A $q \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ elem invertálható akkor és csakis akkor, ha $N(q) \neq 0$.

Bizonyítás:

Ha $N(q) \neq 0$, akkor $q^{-1} = \frac{\bar{q}}{N(q)} \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$, mert $q \cdot q^{-1} = q^{-1} \cdot q = \mathbf{1}$ teljesül. Ha $N(q) = 0$, akkor $q \cdot \bar{q} = \bar{q} \cdot q = N(q) = 0$, így a $q \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ elem zérusosztó, így nem invertálható. □

33. Tétel:
Ha $p, q \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ invertálható elemek, akkor $p \cdot q \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ elem is invertálható és $(p \cdot q)^{-1} = q^{-1} \cdot p^{-1}$.

Bizonyítás:

A 32. tétel szerint $N(p) \neq 0$ és $N(q) \neq 0$, így a 31. tétel alapján $N(p \cdot q) \neq 0$ teljesül, ezért ismét a 32. tétel miatt $p \cdot q \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ is invertálható. Ekkor a 29. tétel (d) pontja, a 31. tétel és a 32. tétel felhasználásával

$$(p \cdot q)^{-1} = \frac{\overline{p \cdot q}}{N(p \cdot q)} = \frac{\bar{q} \cdot \bar{p}}{N(q) \cdot N(p)} = \frac{\bar{q}}{N(q)} \cdot \frac{\bar{p}}{N(p)} = q^{-1} \cdot p^{-1}. \square$$

Definíció:

A $q = a + b \cdot \boldsymbol{i} + c \cdot \boldsymbol{j} + d \cdot \boldsymbol{k}, q' = a' + b' \cdot \boldsymbol{i} + c' \cdot \boldsymbol{j} + d' \cdot \boldsymbol{k} \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ elempár *skaláris szorzatán* a $\langle q, q' \rangle := a \cdot a' + \alpha \cdot b \cdot b' + \beta \cdot c \cdot c' + \alpha \cdot \beta \cdot d \cdot d' \in \mathbb{R}$ valós számot értjük.

Egyszerű közvetlen számolással igazolhatjuk a következő állítás helyességét:

34. Tétel:
A $\mathcal{B}: \mathbb{H}_{\alpha\beta} \times \mathbb{H}_{\alpha\beta} \to \mathbb{R}, (q, q') \mapsto \langle q, q' \rangle$ egy szimmetrikus, bilineáris leképezés: tetszőleges $r \in \mathbb{R}, q, q', q'' \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ esetén:

(a) $\langle q, q' \rangle = \langle q', q \rangle$ kommutatív,
(b) $\langle r \cdot q, q' \rangle = \langle q, r \cdot q' \rangle = r \cdot \langle q, q' \rangle$ homogén,
(c) $\langle q + q', q'' \rangle = \langle q, q'' \rangle + \langle q', q'' \rangle$ disztributív az összeadásra nézve.

Megjegyezzük, hogy a skaláris szorzat általában egy indefinit bilineáris leképezés, amely csak az $\alpha = 1, \beta = 1$ esetben, a Hamilton-féle $\mathbb{H}$ kvaternióknál pozitív definit.

Látható, hogy egyáltalánosított kvaternió normája a skaláris szorzatból származtatható, hiszen ha $q \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$, akkor a norma és a skaláris szorzat értelmezése miatt $N(q) = \langle q, q \rangle$ teljesül.

Legyen $M_4(\mathbb{R})$ az $\mathbb{R}$ valós test feletti negyedrendű négyzetes mátrixok 16-dimenziós teljes mátrixalgebrája! Egy tetszőleges $q = a \cdot \boldsymbol{1} + b \cdot \boldsymbol{i} + c \cdot \boldsymbol{j} + d \cdot \boldsymbol{k} \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ általánosított kvaternióhoz rendeljük hozzá azt az $A \in M_4(\mathbb{R})$ mátrixot, amelyre

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{1} \cdot q \\ \boldsymbol{i} \cdot q \\ \boldsymbol{j} \cdot q \\ \boldsymbol{k} \cdot q \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{k} \end{pmatrix} \tag{22}$$

teljesül. A $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ struktúra műveleteinek algebrai tulajdonságait felhasználva adódnak az

$$\boldsymbol{1} \cdot q = \boldsymbol{1} \cdot (a + b \cdot \boldsymbol{i} + c \cdot \boldsymbol{j} + d \cdot \boldsymbol{k}) = a + b \cdot \boldsymbol{i} + c \cdot \boldsymbol{j} + d \cdot \boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{i} \cdot q = \boldsymbol{i} \cdot (a + b \cdot \boldsymbol{i} + c \cdot \boldsymbol{j} + d \cdot \boldsymbol{k}) = -\alpha \cdot b + a \cdot \boldsymbol{i} - \alpha \cdot d \cdot \boldsymbol{j} + c \cdot \boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{j} \cdot q = \boldsymbol{j} \cdot (a + b \cdot \boldsymbol{i} + c \cdot \boldsymbol{j} + d \cdot \boldsymbol{k}) = -\beta \cdot c + \beta \cdot d \cdot \boldsymbol{i} + a \cdot \boldsymbol{j} - b \cdot \boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{k} \cdot q = \boldsymbol{k} \cdot (a + b \cdot \boldsymbol{i} + c \cdot \boldsymbol{j} + d \cdot \boldsymbol{k}) = -\alpha \cdot \beta \cdot d - \beta \cdot c \cdot \boldsymbol{i} + \alpha \cdot b \cdot \boldsymbol{j} + a \cdot \boldsymbol{k}$$

összefüggések. Ezért

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -\alpha \cdot b & a & -\alpha \cdot d & c \\ -\beta \cdot c & \beta \cdot d & a & -b \\ -\alpha \cdot \beta \cdot d & -\beta \cdot c & \alpha \cdot b & a \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}), \tag{23}$$

(Kaluzsnyin, 1979). Jelölje az ilyen speciális alakú mátrixok halmazát a továbbiakban $M_4^{\mathbb{H}}(\mathbb{R})$.

Ha $z_1 = a + b \cdot \boldsymbol{i},\ z_2 = c + d \cdot \boldsymbol{i} \in \mathbb{C}_\alpha$, akkor vegyük észre, hogy

$$f(z_1) = \begin{pmatrix} a & b \\ -\alpha \cdot b & a \end{pmatrix}, f(z_2) = \begin{pmatrix} c & d \\ -\alpha \cdot d & c \end{pmatrix}, (-\beta) \cdot f(\overline{z_2}) = \begin{pmatrix} -\beta \cdot c & \beta \cdot d \\ -\alpha \cdot \beta \cdot d & -\beta \cdot c \end{pmatrix},$$

$f(\overline{z_1}) = \begin{pmatrix} a & -b \\ \alpha \cdot b & a \end{pmatrix}$, ezért az $A = \begin{pmatrix} f(z_1) & f(z_2) \\ (-\beta) \cdot f(\overline{z_2}) & f(\overline{z_1}) \end{pmatrix}$ alakban is felírható.

35. Tétel:
Az $M_4^{\mathbb{H}}(\mathbb{R})$ alakú mátrixok részalgebrát alkotnak az $M_4(\mathbb{R})$ teljes mátrixalgebrában.

Bizonyítás:

Ha $r \in \mathbb{R},\ A, B \in M_4^{\mathbb{H}}(\mathbb{R})$, akkor egyszerű számolással beláthatjuk, hogy $r \cdot A, A \pm B$, $A \cdot B \in M_4^{\mathbb{H}}(\mathbb{R})$ teljesül. Így $M_4^{\mathbb{H}}(\mathbb{R})$ valóban egy részalgebrát alkot az $M_4(\mathbb{R})$ teljes mátrixalgebrában. □

36. Tétel:
A $G: \mathbb{H}_{\alpha\beta} \to M_4^{\mathbb{H}}(\mathbb{R})$,

$$a + b \cdot \boldsymbol{i} + c \cdot \boldsymbol{j} + d \cdot \boldsymbol{k} \mapsto \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -\alpha \cdot b & a & -\alpha \cdot d & c \\ -\beta \cdot c & \beta \cdot d & a & -b \\ -\alpha \cdot \beta \cdot d & -\beta \cdot c & \alpha \cdot b & a \end{pmatrix}$$

egy algebra-izomorfizmus.

Bizonyítás:

A G egy bijektív leképezés, hiszen G^{-1} is leképezés. Ha $r \in \mathbb{R}, q = a + b \cdot \boldsymbol{i} + c \cdot \boldsymbol{j} +$ $+ d \cdot \boldsymbol{k},\ q' = a' + b' \cdot \boldsymbol{i} + c' \cdot \boldsymbol{j} + d' \cdot \boldsymbol{k} \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$, akkor egyszerű közvetlen számolással beláthatjuk, hogy $G(r \cdot q) = r \cdot G(q)$, így G egy homogén leképezés, $G(q + q') = G(q) + G(q')$, vagyis G egy additív leképezés, $G(q \cdot q') = G(q) \cdot G(q')$, ezért G multiplikatív leképezés is, tehát G egy algebra-izomorfizmus. □

A $G(\mathbf{1}), G(\boldsymbol{i}), G(\boldsymbol{j}), G(\boldsymbol{k}) \in M_4^{\mathbb{H}}(\mathbb{R})$ mátrixok ezen algebra egy természetes bázisát alkotják. Részletezve e mátrixok az alábbi alakúak:

$$G(\mathbf{1}) = G(1 + 0 \cdot \boldsymbol{i} + 0 \cdot \boldsymbol{j} + 0 \cdot \boldsymbol{k}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$G(\boldsymbol{i}) = G(0 + 1 \cdot \boldsymbol{i} + 0 \cdot \boldsymbol{j} + 0 \cdot \boldsymbol{k}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix},$$

$$G(\boldsymbol{j}) = G(0 + 0 \cdot \boldsymbol{i} + 1 \cdot \boldsymbol{j} + 0 \cdot \boldsymbol{k}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$G(\boldsymbol{k}) = (0 + 0 \cdot \boldsymbol{i} + 0 \cdot \boldsymbol{j} + 1 \cdot \boldsymbol{k}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ -\alpha \cdot \beta & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

37. Következmény:

Az $M_4^{\mathbb{H}}(\mathbb{R})$ egy 4-dimenziós, nem kommutatív, asszociatív, neutrális elemes részalgebrát alkot a 16-dimenziós $M_4(\mathbb{R})$ teljes mátrixalgebrában.

A 36. tétel és 37. következménye együtt egy új bizonyítását szolgáltatják a 18. tételnek, továbbá adódik az alábbi:

38. Következmény:

A $G^*: \mathbb{H}_{\alpha\beta} \to M_4(\mathbb{R}), a + b \cdot \boldsymbol{i} + c \cdot \boldsymbol{j} + d \cdot \boldsymbol{k} \mapsto \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -\alpha \cdot b & a & -\alpha \cdot d & c \\ -\beta \cdot c & \beta \cdot d & a & -b \\ -\alpha \cdot \beta \cdot d & -\beta \cdot c & \alpha \cdot b & a \end{pmatrix}$

egy algebra-monomorfizmus.

Bizonyítás:

A 36. tétel alapján azonnal adódik az állítás. □

39. Tétel:

Ha $q = a + b \cdot \boldsymbol{i} + c \cdot \boldsymbol{j} + d \cdot \boldsymbol{k} \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$, akkor

$$N^2(q) = det \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -\alpha \cdot b & a & -\alpha \cdot d & c \\ -\beta \cdot c & \beta \cdot d & a & -b \\ -\alpha \cdot \beta \cdot d & -\beta \cdot c & \alpha \cdot b & a \end{pmatrix}.$$

Bizonyítás:

Fejtsük ki az állításban szereplő negyedrendű determinánst az első sora szerint, s határozzuk meg a kifejtés során keletkezett négy harmadrendű determináns értékét a Sarrus-szabály amely a 28. tétel szerint $N(q)$, s a kiemelés után visszamaradó négy tag összege szintén éppen $N(q)$, a determináns értéke tehát $N^2(q)$.□

Minden $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén a $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ struktúra összeadása és skalárral való szorzása (11), (12), illetve (19), (20) szerint azonos, az összeg és skalárszoros független az $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ paraméterek megválasztásától. A $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ struktúrák között eltérés a szorzásban van, amelyet (13), illetve (21) szerint az $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ paraméterpár határoz meg. A szorzási műveletet viszont a disztributivitás miatt egyértelműen meghatározza az általánosított kvaternióegységek 27. tételben szereplő Cayley-féle műveleti táblázata.

Vizsgáljuk meg a $\tau: \mathbb{H}_{\alpha\beta} \to \mathbb{H}'_{\alpha\beta}, a + b \cdot \boldsymbol{i} + c \cdot \boldsymbol{j} + d \cdot \boldsymbol{k} \mapsto a + c \cdot \boldsymbol{i} + b \cdot \boldsymbol{j} + d \cdot \boldsymbol{k}$ leképzést, amely $\boldsymbol{i}$ és $\boldsymbol{j}$ szerepét felcserélő transzpozíciós leképezés, továbbá egy elemhez a konjugáltját rendelő $\kappa: \mathbb{H}_{\alpha\beta} \to \mathbb{H}'_{\alpha\beta}, a + b \cdot \boldsymbol{i} + c \cdot \boldsymbol{j} + d \cdot \boldsymbol{k} \mapsto a - b \cdot \boldsymbol{i} - c \cdot \boldsymbol{j} - d \cdot \boldsymbol{k}$ leképezést!

Az általánosított kvaternió egységek 27. tételben szereplő műveleti táblázata a τ leképezés hatására $\boldsymbol{i} \rightleftharpoons \boldsymbol{j}$ szerepcseréjével a következő új alakot ölti:

$\cdot$	$\mathbf{1}$	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{i}$	$-\beta$	$-\boldsymbol{k}$	$\beta \cdot \boldsymbol{j}$
$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$	$-\alpha$	$-\alpha \cdot \boldsymbol{i}$
$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{k}$	$-\beta \cdot \boldsymbol{j}$	$\alpha \cdot \boldsymbol{i}$	$-\alpha \cdot \beta$

Az általánosított kvaternió egységek szorzótáblája a κ konjugált leképezés hatása a következő új formát ölti:

$\cdot$	$\mathbf{1}$	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{i}$	$-\alpha$	$-\boldsymbol{k}$	$\alpha \cdot \boldsymbol{j}$
$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$	$-\beta$	$-\beta \cdot \boldsymbol{i}$
$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{k}$	$-\alpha \cdot \boldsymbol{j}$	$\beta \cdot \boldsymbol{i}$	$-\alpha \cdot \beta$

E két táblázat felhasználásával egyszerű közvetlen számolással igazolható a következő állítás:

40. Tétel:

A τ és a κ leképezések mindketten algebra-izomorfizmusok.

Bizonyítás:

A τ és κ is bijektív leképezések, mert τ^{-1} és κ^{-1} egyaránt leképzések.

Ha $r \in \mathbb{R}, q, q' \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ tetszőleges elemek, akkor
$\tau(r \cdot q) = r \cdot \tau(q), \tau(q + q') = \tau(q) + +\tau(q'), \tau(q \cdot q') = \tau(q) \cdot \tau(q')$ és
$\kappa(r \cdot q) = r \cdot \kappa(q), \kappa(q + q') = \kappa(q) + \kappa(q'), \kappa(q \cdot q') == \kappa(q) \cdot \kappa(q')$, így mindkét leképzés valóban algebra-izomorfizmus. □

Készítsük most el a $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ mintájára a $\mathbb{H}_{\beta\alpha}$ egységeinek szorzótábláját az α és β szerepének felcserélésével!

$\cdot$	$\mathbf{1}$	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{i}$	$-\beta$	$\boldsymbol{k}$	$-\beta \cdot \boldsymbol{j}$
$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{j}$	$-\boldsymbol{k}$	$-\alpha$	$\alpha \cdot \boldsymbol{i}$
$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{k}$	$\beta \cdot \boldsymbol{j}$	$-\alpha \cdot \boldsymbol{i}$	$-\alpha \cdot \beta$

41. Tétel:

A $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ algebra izomorf a $\mathbb{H}_{\beta\alpha}$ algebrával.

Bizonyítás:

Először a τ, majd ezután a κ izomorfizmusok $\kappa \circ \tau$ algebra-izomorfizmus kompozíciója a $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ egységeinek szorzótábláját éppen a $\mathbb{H}_{\beta\alpha}$ egységeinek szorzótáblájába viszi, amely az első struktúrának a második struktúrával való izomorfiáját bizonyítja. □

Legyen $E := \{-1,0,1\} \subset \mathbb{Z}$. Az 5. tétel szerint $\mathbb{C}_\alpha$ három alaptípusánál $\alpha \in E$ teljesül. Ha most $\beta \in E$, akkor azonnal látható, hogy $\alpha \cdot \beta \in E$ is teljesül. Ekkor a 27. tétel felhasználásával könnyen adódik, hogy ekkor a kvaternió egységek négyzeteire $\mathbf{1}^2 = \mathbf{1}, \boldsymbol{i}^2 == -\alpha, \boldsymbol{j}^2 = -\beta, \boldsymbol{k}^2 = -\alpha \cdot \beta$ miatt $\mathbf{1}^2, \boldsymbol{i}^2, \boldsymbol{j}^2, \boldsymbol{k}^2 \in E$ adódik. Ekkor tehát a kvaternió egységek szerepe szimmetrikus.

Definíció:

A $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ általánosított kvaternióalgebrát *szimmetrikusnak* nevezzük, ha fennáll rá az $\alpha, \beta \in E$ összefüggés.

Az így adódó 9 szimmetrikus általánosított kvaternióalgebrát az (α, β) értékeinek megfelelően a következő táblázatba rendezhetjük:

$(1,1)$	$(1,-1)$	$(1,0)$
$(-1,1)$	$(-1,-1)$	$(-1,0)$
$(0,1)$	$(0,-1)$	$(0,0)$

A 41. tétel alapján a táblázat főátlójára szimmetrikusan helyezkednek el az izomorf struktúra párok, így a páronként nem izomorf algebrák ezek közül pl. a felső trianguláris részben találhatók:

$(1,1)$	$(1,-1)$	$(1,0)$
	$(-1,-1)$	$(-1,0)$
		$(0,0)$

Ezen 6 struktúra közül 5 ismert: az első sor és harmadik oszlopban szereplő, 22. tétel előtt említett $\mathbb{H}, \mathbb{H}', \mathbb{H}^{\circ}, \mathbb{H}'^{\circ}, \mathbb{H}^{\circ\circ}$ struktúrák (Rosenfeld, 1997).

Az $(\alpha, \beta) = (-1, -1)$ paraméterekkel rendelkező 6. új $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ általánosított kvaternióalgebrát az alábbiakkal jellemezhetjük:

A (18) összefüggésben szereplő $a + b \cdot \boldsymbol{i} + c \cdot \boldsymbol{j} + d \cdot \boldsymbol{k}$ alakú általánosított kvaterniók algebrájában skalárral szorozni a (19), összeadni a (20) szerint komponensenként kell.

A kvaternióegységek szorzótáblája a 27. tétel alapján az $\alpha = \beta = -1$ helyettesítéssel:

$\cdot$	$\mathbf{1}$	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{i}$	$\mathbf{1}$	$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{j}$
$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{j}$	$-\boldsymbol{k}$	$\mathbf{1}$	$-\boldsymbol{i}$
$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{k}$	$-\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{i}$	$-\mathbf{1}$

A szorzás ekkor a (21) képletből nyerhető az ottani jelölésekkel szintén az $\alpha = \beta = -1$ helyettesítéssel:

$$q \cdot q' = (a + b \cdot \boldsymbol{i} + c \cdot \boldsymbol{j} + d \cdot \boldsymbol{k}) \cdot (a' + b' \cdot \boldsymbol{i} + c' \cdot \boldsymbol{j} + d' \cdot \boldsymbol{k}) =$$

$$= (a \cdot a' + b \cdot b' + c \cdot c' - d \cdot d') + (a \cdot b' + b \cdot a' - c \cdot d' + d \cdot c') \cdot \boldsymbol{i} +$$

$$+ (a \cdot c' + b \cdot d' + c \cdot a' - d \cdot b') \cdot \boldsymbol{j} + (a \cdot d' + b \cdot c' - c \cdot b' + d \cdot a') \cdot \boldsymbol{k} .$$

Esetünkben az általánosított kvaterniók normáját a 30. tétel alapján $\alpha = \beta = -1$ miatt a $N(q) = q \cdot \bar{q} = a^2 - b^2 - c^2 + d^2$ képlettel határozhatjuk meg.

Ezt általánosítva két elem skaláris szorzatát az általános definícióból $\alpha = \beta = -1$ szerint a $\langle q, q' \rangle = a \cdot a' - b \cdot b' - c \cdot c' + d \cdot d'$ összefüggéssel számíthatjuk ki.

Végül ebben a struktúrában szereplő általánosított kvaterniókat a

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & -d & a & -b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$$

alakú mátrixok reprezentálják.

Köszönetnyilvánítás

A szerző köszönetét fejezi ki Prof. Dr. Nagy Péter Tibor egyetemi tanárnak szakmai segítségéért és támogatásáért!

Felhasznált irodalom

1. Clifford, W.K. (1873): Preliminary sketch of biquaternion, Proceedings of the London Mathematical Society 4 (64,65), 381-395.
2. Cockle, J. (1849): On Systems of Algebra involving more than one Imaginary, Philosophical Magazine, 35 (3), 434-435.
3. Dickson, L.E. (1912): Linear algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 13. no.1, 59-73.
4. Dickson, L.E. (1914): Linear associative algebras and abelian equations, Trans. Amer. Math. Soc. 15, 31-46.
5. Dickson, L.E. (1919): On Quaternions and Their Generalization and the History of the Eight Square Theorem, Annals of Mathematics, 2nd, 20 (3), 155-171.
6. Dickson, L.E. (1923): Algebras and their arithmetics, Univ. of Chicago Press, Chicago.
7. Jafari, M. (2016): Quaternion Algebra and Its Applications: An Overview, International Journal of Theoretical and Applied Mathematics 2(2): 79-85.
8. Jafari, M. – Yayli, Y. (2015): Generalized Quaternions and Their Algebraic Properties, Commun. Fac. Univ.Ank.Series A1 Vol.64. Nr.1.15-27.
9. Hamilton, W.R. (1834): On Conjugate functions, or algebraic Couples, British Association Report, Edinburg,519-523.
10. Hamilton, W.R. (1837): Theory of conjugate functions, or algebraic couples; with a Preliminary and elementary essay on algebra as the science of pure time, Transactions of the Royal Irish Academy, vol.17, part 1, 293-422.
11. Hamilton, W.R. (1844): On a new Species of Imaginary quantities connected with a Theory of quaternions, Proceedings of the Royal Irish Academy, 2, 424-434.
12. Hamilton, W.R. (1847): On Quaternions, Proceedings of the Royal Irish Academy, 3, 1-16.
13. Kaluzsnyin, L.A. (1979): Bevezetés az absztrakt algebrába, Tankönyvkiadó, Bp.
14. Kantor, I.L. – Szolodovnyikov, A. Sz. (1985): Hiperkomplex számok, Gondolat, Bp.
15. Pierce, R.S. (1982): Associative Algebras, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin
16. Praszolov,V.V. (2005): Lineáris algebra, TypoTEX Kiadó, Bp.
17. Rosenfeld, B. (1997): Geometry of Lie groups, Kluwer Academic Publishers, Netherlands
18. Ward, J.P. (1997): Quaternions and Cayley Numbers, Springer Science + Bussines Media B.V.