

# Felsoroló kombinatív problémák megoldása során használt stratégiák mérésének előkészítése

Gál-Szabó Zsófia\*

*Felsoroló kombinatív feladatok megoldásának során megkülönböztethetjük a megoldás jóságára utaló mennyiségi, valamint a műveletvégzés minőségével, a gondolkodás stratégiájával összefüggésbe hozható minőségi dimenziót (Csapó, 2003 nyomán). Az előbbi vizsgálatára több hazai kutatás is vállalkozott, a minőségi dimenzióval, a kombinatív stratégiákkal kapcsolatban azonban csak nemzetközi munkákról tudunk. Ezért jelen szakirodalmi áttekintés célja a kombinatív stratégiahasználat feltárására tervezett vizsgálataink szempontjából releváns szakirodalom bemutatása. A tanulmányban áttekintjük a kombinatív gondolkodással kapcsolatos főbb nemzetközi és hazai munkákat, majd áttérünk a kombinatív stratégiákkal kapcsolatos kutatásokra. Piaget elmélete alapján (lásd például Inhelder & Piaget, 1967) az egyes fejlődési szinteket a véletlen próbálkoztól a szisztematikus megoldáskeresésig eltérő feladatmegoldási stratégiák jellemzik. Ezzel összefüggésben English (1991, 1993) a véletlen elemválasztástól a szisztematikus mintázatú elemválasztásig hat egyre kifinomultabb stratégiát azonosított. A legfejlettebb, odométer stratégiát használók egy-egy fixen tartott elemhez szisztematikus módon keresik az összes lehetőséget. Ezek a leghatékonyabb stratégiák elengedhetetlenek a bonyolultabb összeállítások hiba nélküli felsorolásához (lásd Adey & Csapó, 2012). A kombinatív stratégiák vizsgálatára tárgyi eszközökön végzett, valamint papíralapú és számítógépes feladatok egyaránt alkalmasak. A tanulók gondolkodásmódjának megismerését segíthetik a tesztelés során a helyszíni megfigyelések, a videófelvételek, valamint a szemmozgásvizsgálat, a hangosan gondolkodtatás és a logfájlokból származó adatok. A tanulmányban felvázoltak alapján, vizsgálatainkban technológiaalapú tesztelési eljárást és logfájelemzést tervezünk. Ezt megelőzően szükségesnek tartunk egy előkészítő kutatást, melyben szemmozgásvizsgálattal megismerhetjük a tanulók feladatmegoldó viselkedését.*

**Kulcsszavak:** kombinatív gondolkodás, felsoroló kombinatív problémák, gondolkodási stratégiák, kombinatív stratégiák

## Bevezetés

A kombinatív gondolkodás a matematika oktatás és a matematikai fejlődés alapvető része (lásd DeTemple & Webb, 2014; English, 2005, 2016; Lockwood, 2013), valamint a gondolkodási képesség egyik összetevője (Nagy, 2004; Adey & Csapó, 2012). A kombinatorika tanítása, a kombinatív gondolkodás fejlődésének támogatása fontos pedagógiai feladat, hiszen mindez számos egyéb területet pozitívan befolyásolhat. Azonban több kutatás (lásd például Mashiach-Eizenberg & Zaslavsky, 2004; Melusova & Vidermanova, 2015; Szitányi & Csikos, 2015) rámutatott a téma problémás voltára, mind a tanulók tudása, mind a terület taníthatósága szempontjából. Többek között ezért mondja Lockwood (2015), hogy sokat kell még megtudnunk a diákok kombinatív gondolkodásáról, feladatmegoldási folyamatairól.

Kutatásainkkal, az imént említett ténnyel összhangban, a kombinatív gondolkodással kapcsolatos tudás bővítéséhez szeretnénk hozzájárulni, melynek első állomása jelen szakirodalmi áttekintés. A téma számos megközelítése okán elengedhetetlen a terület pontosítása; mely esetünkben a felsoroló kombinatív problémák meg-

\* Szegedi Tudományegyetem, Neveléstudományi Doktori Iskola; MTA SZTE Természettudomány Tanítása Kutatócsoport PhD hallgatója, a kutatócsoport tagja, e-mail: szabo.zsofi@edu.u-szeged.hu

oldásának vizsgálata. Felsoroló kombinatív feladatok értékelése során elemezhetjük a létrehozott megoldásokat, azaz a feladaton nyújtott teljesítményt, valamint – ami legalább ennyire fontos – a feladatmegoldás folyamatát, azt, hogy a feladatmegoldó hogyan, milyen struktúra vagy stratégia alapján sorolta föl a megoldásokat. Az eddigi hazai kutatások (például Csapó, 1988, 2001, 2003; Csapó & Pásztor, 2015; Hajdúné Holló, 2004; Nagy, 2004; Pap-Szigeti, 2009; Szabó, Korom & Pásztor, 2015) a két tényező közül az első vizsgálatára irányultak, míg a megoldások felsorolásának módja kapcsán csak nemzetközi vizsgálatokról tudunk (például Piaget vizsgálatai: Inhelder & Piaget, 1967; Piaget, 1970, 1997; Piaget & Inhelder, 2004, valamint English, 1991; 1993; Halani, 2012; Scardamalia, 1977).

Jelen tanulmány célja, az empirikus kutatások megalapozása érdekében, a felsoroló kombinatív problémák szempontjából releváns hazai és nemzetközi kutatások áttekintése, különös tekintettel a megoldások felsorolásával, a kombinatív stratégiákkal kapcsolatos munkákra, valamint az áttekintés alapján felvázolni a továbblépés irányait. A szakirodalmi előzményeket és a továbblépés lehetőségeit bemutató tanulmány első részében a kombinatív gondolkodással kapcsolatban tájékozódhat az olvasó. A második egységben áttekintjük a korábbi vizsgálatok során azonosított stratégiákat, valamint a stratégiahasználat megismerésére alkalmas módszereket. A tanulmány végén a szakirodalmi előzmények alapján felvázoljuk a továbblépés lehetőségét, a stratégiahasználat feltárására irányuló vizsgálatunk tervezett módszereit.

## *Kombinatorika, kombinatív gondolkodás*

A témával foglalkozó irodalmakban számos kifejezéssel találkozhatunk, úgy, mint kombinatorika, kombinatív képesség, kombinatív gondolkodás, kombinatorikai problémák, kombinatív problémamegoldás és így tovább. A képet tovább színesíti, hogy egy-egy kifejezés alatt sem pontosan ugyanazt értik a különböző munkákban. A terület szerteágazó megközelítését szemlélteti a kapcsolódó irodalmak egy lehetséges csoportosítását bemutató felsorolás. Ez alapján találkozunk módszertani anyagokkal, melyek a tanároknak adnak útmutatót a téma taníthatósága kapcsán (például Abramovich & Pieper, 1996; DeTemple & Webb, 2014; Kapur, 1970); elméleti modelleket és a terület oktatásának jelentőségét hangsúlyozó munkákkal (például Batanero, Godino & Navarra-Pelayo, 1997; Lockwood, 2013); a feladatmegoldás során létrejött megoldások minőségét elemző tanulmányokkal (Csapó & Pásztor, 2015; Fishbein & Grosman, 1997; Mwamwenda, 1999; Poddiakov, 2011); valamint az előbbi mellett, a feladatmegoldás folyamatát, a használt stratégiákat is bemutató kutatásokkal (például English, 1991, 1993; Halani, 2012; Kosztolányi et al., 2016; Medova & Vidermanova, 2015; Szitányi & Csíkos, 2015). Jelen tanulmány keretei között az utolsó két területre koncentrálnak.

Az említett felosztáson túl különbség, hogy a hazai és nemzetközi pedagógiai kutatások két alapvető megközelítésben foglalkoznak a témával. Egyrészt matematikai kontextusban, a matematika tanításához kapcsolódóan (kombinatorika, kombinatorikus gondolkodás), másrészt mint a gondolkodási képesség egyik összetevője (kombinatív képesség, kombinatív gondolkodás). Míg a nemzetközi munkákra az első megközelítés jellemző, addig a hazai kutatásokban mindkét iránnyal találkozhatunk. Ahogy az eddig és az ezt követően bemutatott munkákból is látszik, a nemzetközi irodalmak a matematika tanterv, a terület taníthatósága, valamint egy vagy néhány kombinatív probléma (művelet) kapcsán foglalkoznak a témával. A hazai kutatásokban szintén megjelenik a matematikatanítással kapcsolatos megközelítés, erre utal többek között, hogy a matematikai tudás diagnosztikus értékelése kapcsán a kombinatorika is szerepel az értékelendő területek között (lásd Csapó, Csíkos & Molnár, 2015), valamint, hogy Varga Tamás hagyatékából kiindulva a Vancsó Ödön vezette kutatócsoport foglalkozik a kombinatorikával kapcsolatos beállítódásokkal és ismeretekkel, illetve a fejlesztés lehetőségeivel

(lásd például Bagota, 2016; Kosztolányi et al., 2016; Szitányi & Csikos, 2015). Azonban a szűk értelemben vett matematikatanításon túl azonban a hazai kutatásokban a kombinatív gondolkodás, mint a gondolkodási képesség összetevője is megjelenik, melyre egy meghatározott műveletekből álló elméleti konstruktumként tekinthetünk (lásd például Csapó, 1988, 2001, 2003; Nagy, 2004). Saját vizsgálatainkban a két megközelítés közül a kombinatív gondolkodással, mint a gondolkodási képesség egy összetevőjével foglalkozunk, ezért a tanulmány hátralevő részében erre a területre koncentrálnak.

Azonban mielőtt mindeerre rátérünk, fontosnak tartjuk kiemelni, hogy miért vitathatatlan a két megközelítés bármelyikének szellemében szervezett kutatások jelentősége. Mind a kombinatorika tanítása, mind a kombinatív gondolkodás megismerése és fejlesztése számos más területre pozitív hatással lehet. Ennek oka, hogy több tudományterület – például fizika, kémia, biológia, mérnöki tudományok, társadalomtudományok – igényel kombinatorikai ismereteket, mivel azok alapján működik, vagy mert hozzájárulnak a kapcsolódó jelenségek megértéséhez (Kapur, 1970). A kombinatorikus gondolkodás számos további területhez kapcsolódik, hiszen fontos szerepet tölt be a matematikai problémamegoldásban (English, 1993) és a valószínűségi gondolkodásban (Batanero, Godino & Navarra-Pelayo, 1997; English, 2005), a kísérleti gondolkodás alapvető része (Poddia-kov, 2011), az alkotóképesség, a kreativitás (Csapó, 1987; Simonton, 2010) és a természettudományos tudás megértésének (Bitner, 1991; Cavallo, 1996; Yilmaz & Alp, 2006) fontos összetevője, valamint szerepet játszik a problémamegoldásban (Csapó, 1987; English, 2005). Továbbá hozzájárulhat a szisztematikus gondolkodás, valamint a felsorolási folyamatok, az általánosítás és a szabályalkotás fejlődéséhez (English, 2005; Kapur, 1970). Csapó (1987) a kombinatív képesség gondolkodásban betöltött négy funkciójára hívja föl a figyelmet: „az összes lehetőség számbavétele”, „a szokatlan kapcsolatok felszínre hozása”, „a létező, a lehetséges és az elgondolható megkülönböztetése”, és „teljes rendszerek képzése” (pp. 845–849).

### *Kombinatív gondolkodás és felsoroló kombinatív problémák*

A téma számos megközelítése és a kifejezések különféle kontextusban való használata érdekében fontosnak tartjuk meghatározni, hogy saját munkáinkban mit értünk kombinatív gondolkodás (combinatorial reasoning) alatt. A szakirodalomban gyakran találkozunk a kombinatív képesség kifejezéssel, amit Csapó és Pásztor (2015) javaslata alapján az angol terminushoz közelebb álló kombinatív gondolkodás szinonimájaként használunk. A hazai elméleti megközelítések alapján a kombinatív képesség az a gondolkodási típus, ami lehetővé teszi megadott elemekből meghatározott feltételek szerint rendezett egységek létrehozását, különböző tényezők sokféle kapcsolatának vizsgálatát (Adey & Csapó, 2012). Továbbá lehetőséget ad a meglévő információk alapján a lehetőségek számbavételével új tudás teremtésére (Korom et al, 2012). Az előbbi definícióval összecseng Bernoulli (idézi Batanero, Godino és Navarra-Pelayo, 1997) meghatározása, aki a kombinatorikára az összes lehetséges út felsorolásának művészeteként tekint, amely során úgy soroljuk föl a lehetőségeket, hogy egy sem hiányzik közülük.

A kombinatív képesség gondolkodásban betöltött szerepe kapcsán Piaget-t mindenképpen meg kell említeni, kognitív fejlődéseméletében a kombinatív gondolkodás a formális gondolkodás kialakulásában központi szerepet tölt be (Inhelder & Piaget, 1967; Piaget, 1970). Nagy József (2000) személyiségelméletében a kombinatív képesség a kognitív kompetencia részét képző gondolkodási képességen belül meghatározott négy egyszerű képesség egyike (továbbiak: konvertáló, rendszerező és logikai képesség). Csapó és Molnár (2012) pedig az értelmi képességek között, az induktív, a problémamegoldó, az arányossági, a korrelatív, a rendezési és a logikai képességek mellett említik a kombinatív gondolkodást.

A kombinatív gondolkodás kapcsán egy, a kutatásainkhoz csak részben kapcsolódó nemzetközi modellt, valamint két hazai modellt érdemes megemlíteni. Lockwood (2013) matematikai megközelítésű modellje három tényezőt – képletek vagy kifejezések, számolási folyamatok, eredmények halmaza – és az azok közötti kapcsolatokat szemlélteti. Az elméleti megalapozás után középiskolásokkal végzett interjúk alapján finomított modell szoros, kétirányú kapcsolatot jelez a képletek vagy kifejezések és a számolási folyamatok, valamint a számolási folyamatok és az eredmények halmaza között, míg a képletek vagy kifejezések és az eredmények halmaza közötti kapcsolat kevésbé nyilvánvaló. A kétirányú kapcsolatok azt jelzik, hogy a kombinatorikus gondolkodás esetében nincsenek determinálva az egymást követő lépések, elindulhat a képlet hatására a számolási folyamat, de a számolási folyamat is létrehozhatja a képletet, illetve lehet ennél összetettebb, többször oda-vissza ható a kapcsolat. Ehhez hasonlóan a megoldáshoz is többféle út vezethet, létrejöhetnek az eredmények a számolási folyamat következtében, de a lehetséges eredmények is meghatározhatják a számolási folyamatot. Az említett modelltől jellegében eltér a két hazai megközelítés, melyek a kombinatív képességre, mint meghatározott műveletekből álló elméleti konstruktumra tekintenek, így nem magára a feladatmegoldás folyamatára, hanem a képesség összetevőire koncentrálnak. Csapó Benő 80-as években megalkotott elmélete (1988, 2003) alapján a képességet nyolc kombinatív művelet modellezi, melyek a következők: Descartes-féle sorozatok, ismétléses variációk, ismétlés nélküli variációk, összes ismétléses variáció, ismétléses kombinációk, összes rész-halmaz, ismétlés nélküli kombinációk, ismétléses permutációk. A modell azon a feltevésen alapul, hogy bár nyilvánvalóan nem tartalmazza a kombinatív műveletek összes változatát, az ezekre készített feladatokkal felmérhetők a képesség fontosabb megnyilvánulásai (Csapó, 1988). A kombinatív gondolkodás másik hazai modellje Nagy József (2004) nevéhez fűződik, és az elemi kombinatív képességre vonatkozik. Nagy (2004) értelmezésében a képesség „egy halmaz részhalmazainak elemeiből szerveződő összetételek előállítását teszi lehetővé, ha sem az elemfajta száma, sem az összetételek elemszáma nem több kettőnél” (pp. 7–8). A modellben a felhasználható elemek sorrendje és az elemek ismétlődése alapján négy készséget határozott meg (ismétléses variálás, ismétlés nélküli variálás, ismétléses kombinálás, ismétlés nélküli kombinálás). A négy készségen belül pedig az elemfajta száma (kettő vagy három), illetve az összetételek hossza (kettő vagy egy és kettő) alapján tizenhat részkészséget definiált.

Annak érdekében, hogy ne kizárólag azon munkák szolgálhassak tervezett kutatásaink közvetlen előzményül, melyek a kombinatív gondolkodásra, mint a gondolkodási képesség összetevőjére tekintenek, érdemes megvizsgálni, hogy a matematikai megközelítésű vizsgálatok közül melyek lehetnek relevánsak. Ebben segítséget nyújt a kombinatív problémák négy kategóriájának megkülönböztetése, melyet Batanero, Godino és Navarra-Pelayo (1997) más vizsgálatokra alapozva javasolt: (1) a létező problémák esetén azzal foglalkozunk, hogy egy problémának van-e megoldása; (2) a számolási problémák arra koncentrálnak, hogy hány megoldása lehet egy problémának; (3) az optimalizálási problémák esetén a legjobb megoldás megtalálása a cél, míg (4) a felsorolási vagy felsoroló problémák kapcsán az összes lehetséges megoldás szisztematikus felsorolására törekszünk. A leírás alapján belátható, hogy utóbbi, a felsoroló kombinatív problémák analógnak tekinthetők a kombinatív gondolkodással, illetve a képesség mérésére alkalmas feladatokkal, hiszen mindkét esetben megadott elemkészletből kell az összes lehetséges, egymástól különböző, a feladat feltételeinek megfelelő összeállítást felsorolni.

A kombinatív gondolkodás, illetve a felsoroló kombinatív feladatok értékelése során, ahogy erre a bevezetőben is utaltunk, két dimenziót különböztethetünk meg (Csapó, 2003 nyomán). Az első, a mennyiségi dimenzió, a megoldás jóságára, a helyes és helytelen vagy felesleges megoldások arányára utal. Ezzel szemben a második, a minőségi dimenzió a műveletvégzés minőségével, a gondolkodás stratégiájával hozható összefüggésbe,

mely egyfajta lenyomata a feladatmegoldó gondolkodásmódjának. A két dimenzió közötti különbséget szemlélteti az a két tanuló, aki egy felsorolási feladat kapcsán hiba nélkül felsorolta az összes lehetséges összeállítást (tehát hibátlan, 100%-os teljesítményt ért el), azonban a felsorolás során eltérő szisztéma szerint választotta ki az egymást követő összeállításokat. Scardamalia (1977) és English (1991) nyomán utóbbit, a felsorolás rendszerét nevezzük kombinatív stratégiának. Ez alapján a kombinatív gondolkodás minőségi dimenziójával analognak tekinthetjük a kombinatív stratégiákat. A következő alfejezetben a mennyiségi dimenziót vizsgáló kutatókat mutatunk be röviden, ezt követően térünk rá a minőségi dimenzióval, a kombinatív stratégiákkal is foglalkozó kutatások részletesebb ismertetésére.

### *Kombinatív műveletek és kombinatív gondolkodás vizsgálata*

A kombinatorikus gondolkodással kapcsolatos eltérő nemzetközi és hazai tendencia a vizsgálatok és a használt mérőeszközök jellegét is meghatározza. A külföldi kutatások (lásd például English, 1991, 1993; Fishbein és Grosman, 1997; Mwamwenda, 1999; Poddiakov, 2011) egy vagy néhány műveletre koncentrálnak, a kombinatorikus gondolkodást, mint rendszert nem vizsgálják. A korábbi nemzetközi vizsgálatok áttekintése kapcsán Csapó (1988) hasonló következtetésre jutott, miszerint: „Ezekre a munkákra általában az jellemző, hogy csak egy vagy néhány kombinatorikai feladatot használnak a vizsgálat során. Általában nem a struktúrát és a kombinatív jelleget emelik ki, ...” (p. 20). Ezzel szemben a hazai vizsgálatok (lásd például Csapó, 1988, 2003; Csapó és Pásztor, 2015; Nagy, 2004; Hajdúné; 2004; Pap-Szigeti, 2009; Szabó, Korom & Pásztor, 2015), ahogy ezt korábban említettük, a kombinatív képességet, mint meghatározott műveletekből felépülő konstruktumot vizsgálják.

A nemzetközi vizsgálatok kapcsán Piaget-t kell elsőként említenünk, aki (Csapó, 1988 összefoglalása alapján) a következő kísérleti helyzetekben végzett megfigyeléseket: színes korongokból párok összeállítása (kombinációk), színes korongok sorba rendezése (permutációk), rajzolt vonatfigurák, illetve számok párokba állítása a sorrend figyelembevételével (ismétléses variációk), különböző szintelen vegyületekből adott színreakció előállítása (összes részhalmaz). A Piaget-feladatok manipulatív szinten vizsgálták a kísérleti személyek által produkált megoldási módokat. English vizsgálataiban (1991, 1993) szintén manipulatív feladatokat alkalmazott, macskókat kellett a résztvevőknek az összes lehetséges módon felöltöztetniük – Csapó (1988) modellje alapján a Descartes-féle sorozatok művelettípusra irányultak a feladatok. Korábbi vizsgálata (English, 1991) 4 és 9 év közötti gyerekekre (N=50) irányult, akiknek kétdimenziós – két változós – kombinatorikai problémákat adott, macskókat kellett különböző színű (színkombinációk), illetve különböző számú gombokat tartalmazó (számkombinációk) pólókkal és nadrágokkal felöltöztetniük. Későbbi 7 és 12 év közötti gyerek részvételével (N=96) végzett vizsgálatában (English, 1993) az előbbi kétdimenziós problémák mellett háromdimenziósokat (póló, nadrág és teniszütő) is alkalmazott. Poddiakov (2011) szintén manipulatív eszközökkel, 3–7 éveseket (N=623) vizsgált, és azt találta, hogy már az óvodások is képesek kombinálni az egyes cselekedeteket, és felfedezni a cselekedetek mögötti rejtett kapcsolatokat. A vizsgálatok során alkalmazott összetett működésű eszközök – a többi itt bemutatott vizsgálattal ellentétben – nem pontosan fednek le egy-egy kombinatív műveletet, hanem a kombinációs képességre, mint a kísérleti gondolkodás alapvető részének vizsgálatára irányulnak. Schröder, Bödeker, Edelstein és Teo (2000) egy nagyszabású, a kognitív és a szociális fejlődés vizsgálatára irányuló longitudinális kutatás részeként vizsgálták a kombinatorikai gondolkodását. Az iskolába lépéstől 20-22 éves korig tartó izlandi vizsgálat során 15 és 17 éves korokban kaptak a vizsgálat résztvevői kombinatorikai feladatokat, melyek az összes részhalmaz műveletre hasonlítottak leginkább. Mwamwenda (1999) négy szín összes lehetséges módon

való sorba rendezését (ismétlés nélküli permutáció) kérte egyetemistáktól (N=117, átlagéletkor: 24 év) és egyetemet végzettektől (N=45, átlagéletkor: 36 év). A bemutatott nemzetközi vizsgálatokban a Csapó-féle kombinatív modell (1988, 2003) legtöbb műveletére találunk feladatokat (kivéve: ismétléses permutációk és összes ismétléses variáció), és egy további, a modellben nem szereplő műveletre, az ismétlés nélküli permutációra is látunk példát.

A hazai kutatásokra rátérve, a Csapó-féle elméleti modell (1988) alapján egy 37 feladatstruktúrát (manipulatív, képi és formális szinten egy-egy feladattal) tartalmazó tesztrendszer hoztak létre, mellyel a kombinatív képesség feltárása érdekében végeztek vizsgálatokat 4., 8. és 11. évfolyamon (Csapó, 1988). Az eredmények alapján, a képességet legjobban reprezentáló feladatok kiválasztásával létrejött egy rövidített tesztváltozat, mely hat művelettípusra (az eredeti nyolc művelet közül az ismétléses kombinációk és az ismétléses permutációk kerültek ki) tartalmaz egy-egy képi és egy-egy formális feladatot (Csapó, 2001, 2003). Az összesen 12 feladatot tartalmazó rövidített tesztváltozattal országos reprezentatív mintán (N=9.984), 3., 5., 7., 9., és 11. évfolyamon végeztek felmérést (Csapó, 2001b, 2003). A technológiaalapú mérés-értékelés hazai terjedése és az eDia platform létrejöttének (Molnár & Csapó, 2013; Molnár, 2015) köszönhetően elkészült a Csapó-féle kombinatív teszt digitalizált változata, melyen 3. és 4. évfolyamon történt adatfelvétel (Csapó & Pásztor, 2015). Nagy József (2004) modellje alapján 16 szimbolikus (Csapó, 2003 értelmezésében formális) feladatot tartalmazó teszt készült, mellyel országos mintán (N=13.202) mérték föl az elemi kombinatív képességet 4., 5., 6., 8. és 10. évfolyamosok körében. Nagy taxonómiájából kiindulva Hajdúné Holló (2004) az elemi kombinatív képesség fiatalabb korosztályban való vizsgálatára készített manipulatív mérőeszközt, és végzett vizsgálatot 4–8 évesek körében. Az ismertetett hazai vizsgálatoknak köszönhetően a kombinatív képesség esetében rendelkezésünkre állnak jól működő mérőeszközök, a digitális mérőeszköz pedig megteremti a technológiaalapú mérés-értékelés lehetőségét.

## *Kombinatív stratégiák*

A kombinatív feladatokon nyújtott teljesítmény értékelése mellett a feladatmegoldás folyamata, a megoldások létrehozása kapcsán számos tényezővel foglalkozhatunk. A teljesség igénye nélkül álljon itt néhány példa: vizsgálhatjuk a kombinatorikai problémák megoldása során használt ellenőrzési stratégiákat (lásd Mashiach-Eizenberg & Zaslavsky, 2004); megfigyelhetünk egy kiválasztott feladatmegoldási módszert egy kombinatív feladat megoldása során (Lockwood, 2015); elemezhetjük a feladatmegoldási módokat (felsorolás, táblázatba rendezés, fa diagram, képlet stb.) és azok eredményességét számolási problémák esetén (Melusova & Vidermanova, 2015; Szitányi & Csíkos, 2015; Kosztolányi et al., 2016); valamint vizsgálhatjuk a feladatmegoldási stratégiákat felsoroló kombinatív problémák megoldása kapcsán (English, 1991, 1993; Halani, 2012; Lockwood, 2013; Scardamalia, 1977). Ez utóbbi kapcsolódik a kombinatív gondolkodás minőségi dimenziójához, a kombinatív stratégiákhoz, mely alatt, ahogy erre már utaltunk, azt a rendező elvet vagy szisztémát értjük, amit követünk a lehetséges összeállítások felsorolása közben. Ahogy erre később részletesen kitérünk, ezek lehetnek hatékony vagy kevésbé hatékony stratégiák, azonban a bonyolultabb összeállítások hiba nélküli felsorolásához elengedhetetlen a leghatékonyabb stratégiák használata (lásd Adey & Csapó, 2012; English, 1991, 1993).

A kombinatív stratégiák mélyreható vizsgálatával csupán néhány kutatás foglalkozik, azonban a terület jelentőségére több tanulmány is felhívja a figyelmet. A kombinatív feladatok megoldása kapcsán felmerülő problémák egyikeként tartják számon a szisztematikus, tervszerű felsorolás hiányát (lásd Batanero, Godino & Navarra-Pelayo, 1997; English, 2005; Harar & Hadass, 1981), míg máshol a kombinatorika tanítása kapcsán java-

solják, hogy a konstrukciók véletlenszerű létrehozása helyett a megoldások szisztematikus rendezését kérjük a tanulóktól (lásd Abramovich & Pieper, 1996). Egy empirikus tanulmányban az évfolyamon belüli jelentős teljesítménykülönbségek és azok bimodális eloszlása kapcsán mint teljesítményt befolyásoló tényező merül fel a megoldások terv nélküli és tervszerű felsorolása (Csapó & Pásztor, 2015). Melusova és Vidermanova (2015) vizsgálata alapján számolási kombinatív problémák megoldása során a leggyakoribb feladatmegoldási mód az elemek felsorolása, valamint egy másik tanulmány (Kosztolányi et al., 2016) szerint a kombinatív problémák általánosítását meg kell előznie a lehetőségek szisztematikus felsorolásával kapcsolatos tapasztalatoknak. A leírtak arra utalnak, hogy a hatékony kombinatív stratégiák nem csak felsoroló kombinatív problémák megoldása során hasznosíthatók.

A fejezet első részében nemzetközi vizsgálatok eredményei alapján bemutatjuk az azonosított kombinatív stratégiákat, ez követően áttekintjük a stratégiák mérésének lehetőségeit, majd néhány szempont mentén értékeljük ezeket. Tesszük mindezt annak érdekében, hogy ez alapján tervezhessük jövőbeli vizsgálataink módszereit.

### *Azonosított stratégiák*

Mielőtt a vizsgálatok bemutatására rátérnénk, szükségesnek tartjuk egy fogalom tisztázását. Több esetben is találkozhatunk az angol *odometer strategy* vagy *odometer pattern* kifejezéssel. A szóhasználat olyan stratégiára utal, amellyel a megoldások a kilométeróra vagy a napi távolságmérő műszer működési elve alapján kerülnek felsorolásra. A feladatmegoldó az egyik elem fixen tartása mellett szisztematikusan megkeresi (végigpörgeti) az adott elemhez tartozó összes lehetőséget, majd ezt ismétlik. Az *odometer strategy* magyar fordítása során felmerülnek a kilométeróra vagy távolságmérő stratégia, esetleg a kilométerszámláló stratégia kifejezések. Az eredeti kifejezéstől eltávolodva, akár számszár stratégiának is nevezhetnénk, utalva arra ahogy egy számszár próbálunk kinyitni elfelejtett kód esetén. Azonban egyik említett kifejezést sem érezzük elég erősnek és informatívnak, ezért a tanulmányban az eredeti kifejezés magyarosított verzióját, az *odométer stratégia* kifejezést használjuk.

A feladatmegoldás minőségi dimenziójának jellemzése kapcsán elsőként Piaget munkásságát említjük. Értelmi fejlődésről szóló elméletében a műveletek előtti, a konkrét műveleti és a formális műveleti szintet eltérő gondolkodási, más szóval feladatmegoldási stratégiák jellemzik (Inhelder & Piaget, 1967; Piaget, 1970, 1997; Piaget & Inhelder, 2004). Az elmélet értelmében a műveletek előtti szinten lévő feladatmegoldását a véletlen próbálkozás jellemzi, majd a konkrét műveleti szinten megjelenik a rendszerben való gondolkodás, ami a formális műveleti szinten teljeseedik ki. Ezen a szinten alakul ki az a stratégia, ami szisztematikus keresés segítségével lehetővé teszi az összes lehetséges megoldás megtalálását. Piaget az említett szakaszokat életkorhoz kötötte (Piaget, 1970, 1997; Piaget & Inhelder, 2004), ami alapján az általános iskola elejéig az intuitív gondolkodás (műveletek előtti szint), alsó tagozaton pedig a konkrét műveleti gondolkodás jellemző, míg a formális gondolkodás a felső tagozattól jelenik meg.

Feltehetően a kombinatív stratégia és az odométer stratégia kifejezést elsőként használók között van Scardamalia, aki 1977-es tanulmányában részletesen foglalkozik a témával. A négy-nyolc kételemű halmazból álló mérőfeladatai (Descartes féle sorozatok) során a vizsgált személyeknek tulajdonképpen fejben kellett felsorolniuk a megoldásokat. Ugyanis a halmazok különböző elemiből (kártyák) csak egy állt rendelkezésre, ezeket felhasználva kellett egymás után létrehozni a különböző megoldásokat. Mivel nem volt lehetőség a korábbi megoldások áttekintésére, a tökéletes vagy tökéleteshez közeli megoldás létrehozásához elengedhetetlen volt

valamilyen szisztematikus stratégia használata. A vizsgálat alapján az odométer stratégia bizonyult a leghatékonyabbnak, amelynek bár tapasztalták változatait (például jobbról balra vagy balról jobbra változott a fixen tartott elem), ezeket azonosnak tekintették, mert a logikai struktúra nem váltott. Az előteszten a vizsgált minta (8-10 és 10-12 évesek, valamint egyetemisták) gyengén teljesített, azonban az egyre összetettebb gyakorló feladatok során a feladatmegoldási folyamat verbalizálása mellett szinte mindenkinél (40-ből 33 főnél) kialakult és rutinná vált az odométer stratégia használata, ami az utóteszten jelentős teljesítmény javulást eredményezett.

English (1991, 1993) Piaget-kritikákra hivatkozva – melyek szerint elképzelhető, hogy Piaget alábecsülte a gyerekek képességeit, és az alkalmazott feladatok túl tudományosak és elvontak voltak – 4 és 9, valamint 7 és 12 év közötti gyermekek stratégiahasználatát vizsgálta kombinatorikai problémák (Descartes-féle sorozatok) megoldása során. A vizsgálatok eredményeképpen, Piaget elméletével összhangban, a véletlen elemválasztástól a szisztematikus mintázatú elemválasztásig hat, egyre kifinomultabb stratégiát azonosított (1. táblázat). A véletlen választást alkalmazók nem törekednek a feladat céljának elérésére, az összes lehetséges összeállítás felsorolására. Az említett cél csak a következő stratégiánál jelenik meg, ahol az újabb összeállításokat a már korábban létrehozott összeállításokhoz hasonlítják, és a hasonlóság alapján tartják meg vagy vetik el azokat. A harmadik stratégiát English átmenetnek tekinti a próbálkozás és az algoritmikus eljárások között, itt jelenik meg először valamilyen rendszer az összeállítások kiválasztásában. Az utolsó három stratégiát tekinti algoritmikusnak, melyeknél az összeállítások kiválasztásában következetesen alkalmazott rendszer figyelhető meg. Ez a rendszer egyre finomodik, azaz a használt stratégia egyre inkább segíti az összes lehetséges megoldás hiba és a feladatvégzés közbeni korrekció nélküli felsorolását. A negyedik stratégia esetében a lehetséges elemekből következetesen egy-egy kerül kiválasztásra, majd ez a sor folytatódik (például kék, sárga, kék, sárga, ...), ezt a mintázatot jelzi a ciklikus kifejezés. Végül az utolsó két stratégiára jellemző a fixen tartott elem, így English ezeket mondja odometrikusnak.

Kód	Stratégia	Leírás
1.	Véletlen választás	Az összeállítások véletlenszerű megadása, az összes lehetséges megoldás megtalálására való törekvés nélkül.
2.	Próbálgatás	Próba-szerencse stratégiával az összes lehetséges összeállítás megkeresésére való törekvés.
3.	Megjelenő mintázat	Szisztéma, mintázat megjelenése az összeállítások megkeresésében. A szisztéma nem következetes végigvitele.
4.	Teljes ciklikus mintázat	Következetes és teljesen ciklikus mintázat az összeállítások kiválasztásában.
5.	Odométer mintázat	Egyik elem változatlanul hagyása (konstans) mellett a többi lehetőség megkeresése.
6.	Teljes odométer mintázat	Minden lehetséges konstans és a kapcsolódó további elem, elemek teljesen szisztematikus összeállítása.

1. táblázat. English által azonosított stratégiák (English, 1991 alapján)

English (1991, 1993) vizsgálata alapján megállapítja, hogy a feladat feltételeinek megfelelő tökéletes megoldáshoz nem csak az általa legfejlettebbnek tartott teljes odométer stratégia vezet, azonban ezt tartja a leghatékonyabb megoldási útnak (a felsorolási szisztéma következetesen tartalmazza az összes lehetőséget, ezért



nincs szükség a korábbi megoldások folyamatos áttekintésére, illetve menet közbeni vagy utólagos javításokra). Azonban a leghatékonyabb megoldási út vagy stratégia nemcsak egyféle lehet, több hatékony megoldási út is létezik, melyekben közös az algoritmus jelenléte (Halani, 2012; Lockwood, 2013). A hatékony algoritmikus stratégiáknak jellemzője tehát, hogy szisztematikus felsoroláson alapulnak, azaz mindegyikben megjelenik egy-fajta rögzítettség, miszerint egy-egy fixen tartott elem vagy tényező segíti az összes lehetséges összeállítás szisztematikus felsorolását (odométer analógia).

A hatékony algoritmikus stratégiákkal kapcsolatban Halani (2012) egyetemistákkal végzett vizsgálatában az odométer gondolkodás két verzióját tapasztalta: a gyakoribb, hagyományosnak és a ritkább, szokatlannak nevezett változatot. A hagyományos vagy standard odométer gondolkodás során először az első pozícióban tartanak fixen egy elemet, és ehhez szisztematikus kereséssel kapcsolják a többi elemet, majd az első fixált elemet megváltoztatják és ezt ismétlik, amíg minden elem az első pozícióba kerül (például 000, 001, 002, ... 009, majd 010, 011 ... 019, ...). A leírás alapján belátható, hogy ez megfelel az English (1991, 1993) vizsgálati kapcsán bemutatott teljes odométer stratégiának. Ezzel szemben a szokatlan odométer gondolkodás esetében a fixen tartott elem nem feltétlenül az első helyen van. Először egy elemet egy pozícióban tart fixen a feladatmegoldó, majd ehhez szisztematikus variálja a többi elemet. Ezt követően az előbb fixen tartott elem pozícióját változtatja meg, és ezt a folyamatot ismétli (például A -- --, -- A --, -- -- A). Egy másik tanulmány (Lockwood, 2013) szintén kétféle struktúrát mutat be, az első esetében először az egyik, majd a másik és a harmadik elemmel kapcsolatos összes megoldás kerül felsorolásra. Ez analógnak tekinthető English (1991, 1993) teljes odométer stratégiájával, valamint a Halani (2012) által hagyományos odométer gondolkodásnak nevezett esettel. A másik struktúra esetében először az azonos elemeket tartalmazó összeállítások kerülnek felsorolásra, majd a egyik, másik és harmadik két elemet tartozó felsorolások, végül a mindhárom elemet tartalmazók.

A 2. táblázatban az említett vizsgálatokban megfelelő hatékony algoritmikus stratégiákra mutatunk egy-egy példát. (A korábbi leírások és a táblázat alapján láthatjuk, hogy az adott odométer stratégiák és a kombinatív műveletek nem, illetve csak részben választhatók el egymástól.) A táblázat második oszlopában szereplő összeállítások esetében jól látható, hogy azok azonos – Halani (2012) által hagyományos odométer gondolkodásnak nevezett – stratégia szerint kerülnek felsorolásra. Ezzel szemben a harmadik oszlopban két művelet kapcsán arra mutatunk egy-egy példát, hogy az összes lehetséges összeállítást a hagyományostól eltérő hatékony stratégiával is létre lehet hozni.

Művelet	Hagyományos odométer stratégia	Nem hagyományos odométer stratégia	Forrás
Descartes-féle sorozatok	A1, A2, A3 B1, B2, B3 C1, C2, C3	-	Scardamalia, 1977; English, 1991, 1993
Ismétlés nélküli permutáció	ABC, ACB, BAC, BCA CAB, CBA	ABC, ACB, BAC, CAB, BCA, CBA	Halani, 2012
Ismétléses variáció	AA, AB, AC BA, BB, BC CA, CB, CC	AA, BB, CC AB, BA AC, CA BC, CB	Lockwood, 2013

2. táblázat. Hatékony algoritmikus stratégiák különböző kombinatív műveletek esetében (English 1991, 1993; Halani, 2012; Lockwood, 2013; Scardamalia, 1977 alapján)

## *Stratégiák mérése*

---

A továbbiakban a kombinatív gondolkodás minőségi dimenziójának, azaz a kombinatív stratégiák mérésének lehetőségeit tekintjük át. Ahogy erre korábban utaltunk, ez a műveletvégzés minőségével, a gondolkodás stratégiájával kapcsolatos terület, melyről vitathatatlan, hogy a lehető legpontosabb információt a feladatmegoldás alapos megfigyelésével és értelmezésével nyerhetünk. Azonban ezen felül számos módszer segítheti a tanulók gondolkodásmódjának megismerését. A fejezetben először ismertetjük a korábban bemutatott kutatásokban alkalmazott módszereket, majd számba vesszünk további lehetőségeket.

A kombinatív stratégiákkal kapcsolatos három idézett kutatásban (English, 1991, 1993; Halani, 2012) közös, hogy az adatok a feladatmegoldás során készített videók utólagos elemzéséből származnak. A módszer használatával, bár többletmunka árán, de ki tudták zárni a kizárólag helyszíni megfigyelés esetén fellépő információvesztéséget. English (1991) fiatalabb korosztályt érintő vizsgálatában a résztvevők szem-, fej- és kézmozgását vették videóra. Idősebb, 7 és 12 év közötti gyerekekre irányuló vizsgálata során (English, 1993) pedig arra kérték a vizsgálati személyeket, hogy a feladat megoldása után magyarázzák el saját megoldási folyamataikat és a válaszaikat videóra vették. Halani (2012) egyetemi hallgatókat vizsgált, a résztvevők gondolkodásmódjának feltárására irányuló feladat alapú interjúk segítségével. A feladatok megoldása előtt arra kérték a vizsgált személyeket, hogy tegyenek föl kérdéseket az adott feladat kapcsán, majd a feladat megoldása során az írásos megoldáson túl szóban is ismertessék a megoldásuk menetét (a hangosan gondolkodtatás módszeréhez hasonlóan). Az interjúkról videófelvételeket készítettek, ami alapján utólag azonosították a tanulók gondolkodásmódját. A bemutatott, kombinatív stratégiákra irányuló vizsgálatokban tehát a vizsgálati személyeknek adott feladatok megoldása kapcsán a megfigyelés, az interjú és a feladat alapú interjú módszerét alkalmazták a kutatók, mely minden esetben párosult videófelvétellel, így az adatok nem kizárólag helyszíni megfigyelésekből, hanem a videók utólagos elemzéséből származtak.

A következőkben a gondolkodási folyamatok vizsgálata kapcsán felmerülő további lehetséges módszereket ismertetjük. Bár nem tudunk arról, hogy ezeket a módszereket a kombinatív stratégiahasználat vizsgálata kapcsán korábban alkalmazták volna, alkalmasnak tartjuk őket a probléma vizsgálatára. Több kutatás alapján (lásd például Józsa & Józsa, 2014; Steklács, 2011) a stratégiahasználat mérésének egyik lehetséges módja a tanulók saját stratégiahasználatról való elképzelésük feltérképezésére irányuló, önjellemzésen alapuló kérdőív. A hangosan gondolkodtatás módszere (lásd például Kelemen, Csíkos & Steklács, 2005) lehetővé teszi, hogy megismerjük a feladatmegoldó feladatvégzés közben felmerülő gondolatait, ezáltal más szemszögből kapjunk képet a feladatmegoldás folyamatáról. A szemmozgáskövető műszerek fejlődésnek köszönhetően a pedagógia területén is egyre több szemmozgásvizsgálatot végeznek (lásd például Steklács, 2014), mely új perspektívából szolgáltat információt a vizsgálati személyek feladatmegoldásáról. A videómegfigyelések kapcsán, a gyakoribb-nak mondható kvalitatív elemzések mellett, lehetőség nyílik a rögzített események utólagos kvantitatív elemzésére, mely többek között lehetőséget teremt időegységenként a domináns stratégiák meghatározására (lásd például Kelemen, Csíkos & Steklács, 2005). Végül a stratégiahasználat mérése kapcsán említést érdemel a logfájllemzés (lásd például Csíkos, 2004; Molnár, 2016), mely új lehetőségeket hozott a mérés-értékelésben. A módszer a technológiaalapú teszteléssel (lásd például Molnár & Csapó, 2013; Molnár, 2015) hozható összefüggésbe, mely során a válaszok mellett a logfájlokban úgynevezett kontextuális adatok (lásd például Molnár, 2016) is rögzítésre kerülnek. Ezek alapján, rekonstruálhatóvá válik a feladatmegoldás folyamata.

### *Mérési módszerek értékelése*

A bemutatott kutatások alapján a gondolkodásmód, a stratégiahasználat vizsgálatára több jól alkalmazható módszer is rendelkezésünkre áll. A felvázolt lehetőségek nem tekinthetők egyenrangúnak, azok sokszor egymást kiegészítve alkalmazhatók. A következőkben a bemutatott módszereket és azok kapcsolatát összegezzük. A stratégiahasználatot tárgyi eszközökkel végzett, illetve papíralapú vagy számítógépes feladatok megoldása során vizsgálhatjuk. Ezek mellett kérdőívek és interjúk segítségével feltárhatjuk a vizsgálati személyek gondolatait, elképzeléseit saját megoldási folyamataikról. Az adatfelvételek (különösen a tesztelés) során kiegészítésként végezhetünk szemmozgásvizsgálatot, illetve alkalmazhatjuk a hangosan gondolkodtatás módszerét. Az adatgyűjtést és adatelemzést kiegészíthetjük és pontosabbá tehetjük a helyszíni megfigyelések, a hang- és videó felvételek, valamint számítógépes tesztelés esetén a logfájlokból származó adatok.

A továbbiakban a tervezett kutatásaink céljaihoz leginkább illeszkedő módszerek kiválasztásának segítése érdekében néhány szempont mentén jellemezzük a már ismertetett módszereket. Csikos (2004) munkájában aszerint csoportosítja a lehetőségeket, hogy az adatfelvétel a feladatmegoldási folyamat előtt, közben vagy után valósul meg. Az előzetes és utólagos mérési módszerek között a kérdőíveket és az interjúkat, míg a feladatmegoldás közbeni módszerek között a hangosan gondolkodtatást, a megfigyelést, a logfájlok elemzését és a szemmozgásvizsgálatot említi. A csoportosítással analóg módon áttekinthetjük, hogy az egyes módszerek közvetlenül vagy közvetetten alkalmasak a stratégiák mérésére. Míg a kérdőív és az interjú egyértelműen közvetett módszernek tekinthető a stratégiahasználat vizsgálata szempontjából, addig a logfájlelemzés és a hangosan gondolkodtatás átmenetinek mondható, végül álláspontunk szerint a megfigyelés, a videófelvétel és a szemmozgásvizsgálat járul hozzá leginkább a stratégiák közvetlen méréséhez. A módszereket a tervezett minta elemszáma alapján is értékelhetjük. Amennyiben több száz fős (vagy ennél is nagyobb) mintán tervezzük az adatfelvételt, a kérdőív és a logfájlelemzés tűnik kézenfekvőnek, míg a többi módszer (megfigyelés, interjú, videófelvétel, szemmozgásvizsgálat, hangosan gondolkodtatás) kisebb mintaelemszám esetében javasolható.

A fejezet végén a kutatási célnak megfelelő módszer kiválasztásához adunk néhány támpontot. A gondolkodási folyamatokkal összefüggésben a vizsgálatok tárgya (célja) szempontjából két irányt látunk. Egyrészt koncentrálhatunk a feladatmegoldás folyamatára, a stratégiahasználat vizsgálatára, másrészt foglalkozhatunk a metakognitív folyamatok megismerésével. Előbbire, bizonyos keretek között, a bemutatott módszerek mindegyike alkalmazható, utóbbira a hangosan gondolkodtatás, a kérdőív és az interjú módszerét tartjuk legalkalmasabbnak. Alapvetően meghatározza a vizsgálat jellegét, hogy egyéni adatfelvétel keretében, a lehető legtöbb részletre kiterjedően, akár az előzetesen meghatározott szempontokon túl is szeretnék adatokat gyűjteni, vagy inkább csoportos adatfelvétel keretében szeretnék átfogó képet kapni a vizsgált területről (a technológia alapú adatfelvétel ezt a képet némileg árnyalja). Az egyéni vizsgálat időigénye vitathatatlan, így ebben az esetben kisebb elemszámú mintával érdemes terveznünk, míg csoportos adatfelvétel mellett nagymintás vizsgálat is reálisan elvégezhető. Ahogy erről korábban szó esett, nagy mintaelemszám esetében a kérdőív és a logfájlelemzés módszerét használnánk, míg kisebb mintán vagy nagymintás vizsgálat egy részmintáján a többi módszerrel részletes vizsgálatokat végezhetünk. Eltérő lehetőségek rejt magában egy papíralapú és egy technológiaalapú adatfelvétel. Bizonyos módszerek (logfájl elemzés, szemmozgásvizsgálat) feltételezik a számítógépes tesztelést, míg mások mindkét technológiával eredményesen elvégezhetőek. Bármelyik módon történik az adatfelvétel, fontosnak tartjuk, hogy a feladatok és kérdések jellege illeszkedjen az adott környezet adta lehetőségeihez. Végül az adatgyűjtés folyamatának „visszanézhetőségét” hozzuk, mint szempontot. Véleményünk

szerint egy előkészítő vizsgálatnál hasznos lehet, ha az adatfelvétel minél több mozzanatát tudjuk rögzíteni, így utólag is lehetőség nyílik újabb szempontok mentén való értékelésre. Ebben a tekintetben a videófelvételt és a szemmozgásvizsgálatot jól hasznosíthatónak tartjuk, valamint bizonyos keretek között a logfájllemzések is megteremthetik ezt a lehetőségét.

## *Összegzés, továbblépés*

Tanulmányunkban a gondolkodási képesség egyik összetevőjével, a kombinatív gondolkodással foglalkozunk. Az elméleti munkában bemutattuk a kutatásokban megjelenő két irányt, miszerint a matematika tanításához kapcsolódóan, valamint a gondolkodási képesség egyik összetevőjeként foglalkozhatunk a témával. Kijelöltük, hogy munkánk során mit értünk kombinatív gondolkodás és felsoroló kombinatív probléma alatt, és ismertettük a kombinatív gondolkodás mérése során a megoldás jóságához kapcsolódó mennyiségi, és a kombinatív stratégiával analógnak tekinthető minőségi dimenziót. Az első rész zárásaként a felsoroló kombinatív problémák megoldását és a kombinatív gondolkodást vizsgáló munkákat említettük. A tanulmány második része, ahogyan saját kutatásaink is, az említett két dimenzió közül a másodikkal foglalkozik. A kombinatív stratégiák kapcsán bemutattuk a Piaget és English által azonosított stratégiákat, és említést tettünk a hatékony algoritmikus stratégiákról. A fejezet végén korábbi kutatások alapján bemutattuk a kombinatív stratégiahasználat mérésére alkalmasnak tartott módszereket, majd különböző szempontok mentén jellemeztük azokat.

A tanulmány célja a kombinatív gondolkodás minőségi dimenziójára, a kombinatív stratégiahasználat vizsgálatára, a stratégiák feltárására és változásuk azonosítására irányuló kutatásaink előkészítése volt. Ennek értelmében a szakirodalom áttekintése mellett az adatgyűjtés lehetséges módszereinek áttekintése is fontos szerepet kapott, ezzel segítve saját vizsgálati módszereink kiválasztását. A tanulmány végén, a munka tanulságait és a további terveinket összekapcsolva a kutatásunk következő fázisaiban tervezett módszereket ismertetjük és indokoljuk. A kombinatív stratégiákkal kapcsolatos mérésekre irányuló kutatói szándék papíralapú tesztekkel, több száz fős mintán, jelentős humán erőforrást emészthet föl, hiszen minden kísérleti személy minden feladatra esetén külön kellene vizsgálni és meghatározni az alkalmazott stratégiákat. Azonban a technológiaalapú mérés-értékelési rendszerek használatának köszönhetően a rendszer rögzíti a válaszokat, ami megkönnyíti az adatelemzést. A kombinatív műveletek esetén lehetőség van a kísérleti személyek által létrehozott összeállítások adatbázisokba rendezésére és utólagos elemzésére, megfelelő kritériumok meghatározása mellett a használt stratégiák azonosítására. Ezért vizsgálataink során technológiaalapú tesztelési eljárást és logfájllemzést tervezünk. Ennek érdekében első lépésként a már meglévő tesztekben kiindulva szeretnénk létrehozni a saját mérőeszközünket, mely a stratégiákat közvetlenül vizsgáló felsoroló kombinatív feladatok mellett a feladatmegoldási folyamatra vonatkozó kérdéseket is tartalmaz. Ezáltal várhatóan lehetőségünk lesz a feladatmegoldás során tapasztalt (teszt) és a tanulók által vélt (kérdőív) stratégiahasználat összehasonlítására. A kutatás legkritikusabb feladatának a stratégiahasználat vizsgálatára alkalmas szempontrendszer vagy kategorizálás kidolgozását tartjuk. Ezért, a nagyobb mintán való sikeres vizsgálódáshoz, a szakirodalmi előzményeken túl, szükségesnek tartunk egy feltáró kutatás elvégzését, mely során részletes képet kaphatunk a tanulók feladatmegoldási folyamatáról, valamint azonosíthatjuk azokat a részleteket, amelyekre a később vizsgálatok során érdemes koncentrálnunk. Korábbi tapasztalatok és a tanulmányban leírtak alapján erre az előkészítő kutatásra a szemmozgásvizsgálat módszere megfelelőnek bizonyulhat.

Kutatásunk hozzájárul a gondolkodási képesség egyik összetevője, a kombinatív gondolkodás alaposabb megismeréséhez. A képesség vizsgálata kapcsán a megoldások jóságára vonatkozó mennyiségi dimenzió vizs-

gálat korábbi kutatásokban megtörtént. Azonban a gondolkodás stratégiájával, a feladatmegoldás folyamatával összefüggésbe hozható minőségi dimenzió feltárása tudomásunk szerint még nem valósult meg hazánkban. Ismerünk kombinatív stratégiákra irányuló nemzetközi vizsgálatokat, azonban ezek csupán egy vagy néhány kombinatív művelet vizsgálatára koncentrálnak. A jelen tanulmánnyal előkészített tervezett kutatásaink hozzájárulhatnak a tanulók gondolkodásmódjának, kombinatív stratégiáinak megismeréséhez, eredményeink alapul szolgálhatnak a fejlesztés tervezéséhez, ezáltal hozzájárulhatnak a gondolkodási képesség fejlődésének segítéséhez, és a tanítási-tanulási folyamat eredményesebbé tételéhez.

## Köszönetnyilvánítás

---

A tanulmány elkészítését a Magyar Tudományos Akadémia Tantárgypedagógiai Kutatási Programja támogatta.

## Irodalom

---

1. Abramovich, S. & Pieper, A. (1996). Fostering recursive thinking in combinatorics through the use of manipulatives and computing technology. *Mathematics Educator*, 7(1), 4–12.
2. Adey, P. & Csapó, B. (2012). A természettudományos gondolkodásfejlesztése és értékelése. In Csapó, B. & Szabó, G. (Eds.), *Tartalmi keretek a természettudomány diagnosztikus értékeléséhez* (pp. 17–58). Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó.
3. Bagota, M. (2016). A kombinatorikus gondolkodás fejlesztésének lehetőségei. *Új Köznevelés*, 72(8), 30–37.
4. Batanero, C., Godino J. D. & Navarro-Pelayo, V. (1997). Combinatorial reasoning and its assessment. In Gal, I. & Garfield, J. B. (Eds.), *The Assessment Challenge in Statistics Education* (pp. 239–252). Amsterdam: IOS Press.
5. Bitner, B. L. (1991). Formal operational reasoning modes: Predictors of critical thinking abilities and grades assigned by teachers in science and mathematics for students in grades nine through twelve. *Journal of Research in Science Teaching*, 28(3), 265–274.
6. Cavallo, A. M. L. (1996). Meaningful learning, reasoning ability and students' understanding and problem solving of genetics topics. *Journal of Research in Science Teaching*, 33(6), 625–656.
7. Csapó, B. (1987). A kombinatív képesség fejlesztése az általános iskolában. *Pedagógiai Szemle*, 37(9), 844–853.
8. Csapó, B. (1988). *A kombinatív képesség struktúrája és fejlődése*. Budapest: Akadémiai Kiadó.
9. Csapó, B. (2001). A kombinatív képesség fejlődésének elemzése országos reprezentatív felmérés alapján. *Magyar Pedagógia*, 101(4), 511–530.
10. Csapó, B. (2003). *A képességek fejlődése és iskolai fejlesztése*. Budapest: Akadémiai Kiadó.
11. Csapó, B., Csíkos, Cs. & Molnár, Gy. (2015, Eds.). *A matematikai tudás online diagnosztikus értékelésének tartalmi keretei*. Budapest: Oktatókutató és Fejlesztő Intézet.
12. Csapó, B. & Molnár, Gy. (2012). Gondolkodási készségek és képességek fejlődésének mérése. In Csapó, B. (Ed.), *Mérlegen a magyar iskola* (pp. 407–440). Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest.
13. Csapó, B. & Pásztor, A. (2015). A kombinatív képesség fejlődésének mérése online tesztekkel. In Zsolnai, A. & Csapó, B. (Eds.), *Online diagnosztikus mérések az iskola kezdő szakaszában* (pp. 367–385). Budapest: Oktatókutató és Fejlesztő Intézet.
14. Csíkos, Cs. (2004). Metakogníció a tanulásban és a tanításban. Az EARLI 10. konferenciájának kutatási eredményei. *Iskolakultúra*, 14(2), 3–11.
15. DeTemple, D. & Webb, W. (2014). *Combinatorial reasoning. An introduction to the art of counting*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.

16. English, L. D. (1991). Young children's combinatoric strategies. *Educational Studies in Mathematics* 22(5), 451–474.
17. English, L. D. (1993). Children's strategies for solving two- and three-dimensional combinatorial problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(3), 255–273.
18. English, L. D. (2005). Combinatorics And The Development Of Children's Combinatorial Reasoning. In Jones, G. A. (Ed.), *Exploring probability in schools: Challenges for teaching and learning* (pp. 121–141). Dordrecht: Kluwer.
19. English, L. D. (2016). Revealing and capitalising on young children's mathematical potential. *ZDM Mathematics Education*, 48(7), 1079–1087.
20. Fishbein, E., & Grosman, A. (1997). Schemata and intuitions in combinatorial reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 34(1), 27–47.
21. Hadar, N. & Hadass R. (1981). The road to solving a combinatorial problem is strewn with pitfalls. *Educational Studies in Mathematics*, 12(4), 435–443.
22. Hajdúné Holló, K. (2004). Az elemi kombinatív képesség fejlődésének kritériumorientált diagnosztikus feltárása 4–8 évesek körében. *Magyar Pedagógiai*, 104(3), 263–292.
23. Halani, A. (2012). Students' ways of thinking about enumerative combinatorics solution sets: the odometer category. In Brown, S., Larsen, S., Marrongelle, K. & Oehrtman M. (Eds.), *Proceedings of the 15th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education* (pp. 59–68). Portland, Oregon: The Special Interest Group of the Mathematics Association of America (SIGMAA) for Research in Undergraduate Mathematics Education.
24. Inhelder, B. & Piaget, J. (1967). *A gyermek logikájától az ifjú logikájáig*. Budapest: Akadémiai Kiadó.
25. Józsa, G. & Józsa, K. (2014). A szövegértés, az olvasási motiváció és a stratégiahasználat összefüggése. *Magyar Pedagógia*, 114(2), 67–89.
26. Kapur, J. N. (1970). Combinatorial analysis and school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 3(1), 111–127.
27. Kelemen, R., Csíkos, Cs. & Steklács, J. (2005). A matematikai problémamegoldást kísérő metakognitív stratégiák vizsgálata a hangosan gondolkodtatás és a videomegfigyelés eszközeivel. *Magyar Pedagógia*, 105(4), 343–358.
28. Korom, E., Nagy Lászlóné, B. Németh, M., Radnóti, K., Makádi, M., Adorjáné Farkas, M., Revákné Markóczi, I., Tóth, Z., Csíkos, Cs. & Wagner, É. (2012). Részletes tartalmi keretek a természettudomány diagnosztikus értékeléséhez. In Csapó, B. & Szabó, G. (Eds.), *Tartalmi keretek a természettudomány diagnosztikus értékeléséhez* (pp. 179–310). Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó.
29. Kosztolányi, J., Pintér, K. Bagota, M. & Dancs, G. (2016). How do students solve combinatorial problems? – Some results of a research about difficulties and strategies of Hungarian students. In Csíkos, Cs., Rausch, A. & Sztányi, J. (Eds.), *Proceedings of the 40th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education: PME40* (pp. 115–122). Szeged: International Group for the Psychology of Mathematics Education.
30. Lockwood, E. (2013). A model of students' combinatorial thinking. *The Journal of Mathematical Behavior*, 32(2), 251–265.
31. Lockwood, E. (2015). The Strategy of Solving Smaller, Similar Problems in the Context of Combinatorial Enumeration. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 1(1), 339–362.
32. Mashiach-Eizenberg M., & Zaslavsky, O. (2004). Students' verification strategies for combinatorial problems. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(1), 15–36.
33. Melusova, J. & Vidermanova, K. (2015). Upper-secondary Students' Strategies for Solving Combinatorial Problems. *Procedia – Social and Behavioral Sciences*, 197, 1703–1709.
34. Molnár, Gy. (2015). A képességmérés dilemmái: a diagnosztikus mérések (eDia) szerepe és helye a magyar közoktatásban. *Génius Műhely Kiadványok*, (2), 16–29.

35. Molnár, Gy. (2016). Interaktív problémamegoldó környezetben alkalmazott felfedező stratégiák hatékonysága és azok változása: logfájl-elemzések. *Magyar Pedagógia*, 116(4), 427–453.
36. Molnár, Gy. & Csapó, B. (2013). Az eDia online diagnosztikus mérési rendszer. In Józsa, K. & Fejes, J. B. (Eds.), *PÉK 2013. XI. Pedagógiai Értékelési Konferencia. Program – Előadás-összefoglalók* (p. 82). Szeged: Szegedi Tudományegyetem.
37. Mwamwenda, T. S. (1999). Undergraduate and graduate students' combinatorial reasoning and formal operations. *Journal of Genetic Psychology*, 160(4), 503–505.
38. Nagy, J. (2000). *XXI. század és nevelés*. Budapest: Osiris Kiadó.
39. Nagy, J. (2004). Az elemi kombinatív képesség kialakulásának kritériumorientált diagnosztikus feltárása. *Iskolakultúra*, 14(8), 3–20.
40. Pap-Szigeti, R. (2009). *Kritériumorientált képességfejlesztés tantárgyi tartalmakkal az 5. évfolyamon*. PhD értekezés, Szeged.
41. Piaget, J. (1970). *Válogatott tanulmányok*. Budapest: Gondolat Kiadó.
42. Piaget, J. (1997). *Az értelem pszichológiája*. Győr: Kairos Kiadó.
43. Piaget, J. & Inhelder, B. (2004). *Gyermeklélektan*. Budapest: Osiris Kiadó.
44. Poddiakov, A. (2011). Didactic objects for development of young children's combinatorial experimentation and causal-experimental thought. *International Journal of Early Years Education*, 19(1), 65–78.
45. Scardamalia, M. (1977). Information Processing Capacity and the Problem of Horizontal "Décalage": A Demonstration Using Combinatorial Reasoning Tasks. *Child Development*, 48(1), 28–37.
46. Simonton, D. K. (2010). Creative thought as blind-variation and selective-retention: Combinatorial models of exceptional creativity. *Physics of life reviews*, 7(2), 156–179.
47. Steklács, J. (2011). Az olvasásra vonatkozó meggyőződés vizsgálata negyedik osztályos tanulók körében. *Anyanyelv-pedagógia*, 4(2).
48. Steklács, J. (2014). A szemmozgás vizsgálatának lehetőségei az olvasás és a vizuális információfeldolgozás képességének a megismerésében. *Anyanyelv-pedagógia*, 7(3).
49. Szabó, Zs., Korom, E. & Pásztor, A. (2015). A kombinatív képesség rövid távú fejleszthetősége 3. évfolyamon természettudományos kontextusban. *Magyar Pedagógia*. 115(4), 383–401.
50. Szitányi, J. & Csíkos, Cs. (2015). Performance and strategy use in combinatorial reasoning among pre-service elementary teachers. In Beswick, K., Muir, T. és Wells, J. (Eds.), *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 4225–4232). Hobart: International Group for the Psychology of Mathematics Education.
51. Yilmaz, A. & Alp, E. (2006). Students' understanding of matter: the effect of reasoning ability and grade level. *Chemistry Education Research and Practice*, 7(1), 22–31.

## *Preparation for measuring the strategies used in solving enumerative combinatorial problems*

---

With regard to measuring enumerative combinatorial problems, we can define two dimensions (based on Csapó, 2003). The quantitative dimension shows the correctness of the solution, while the qualitative one represents the strategy of thinking. Several national surveys have dealt with the first dimension, however in connection with the qualitative dimension, in other words, the combinatoric strategies, only international studies are known. Therefore, the aim of this literature review is to be prepared for our further investigation on combinatoric strategy usage. The paper overviews the main international and national studies related to combinatorial reasoning, as well as researches in combinatoric strategies. Based on Piaget's theory (see eg. Inhelder & Piaget, 1967), each developmental stage is characterised by different task solving strategies from trial-and-error procedure to systematic solution search. In this context, English (1991, 1993) observed six different strategies from the random item selection to the systematic item selection. People who use the most effective "odometer" strategies hold an item fixed and search for all the options systematically. These most effective strategies are necessary to enumerate the all possible solutions without mistakes in case of a complicated task (see Adey & Csapó, 2012). To examine combinatoric strategies, manipulative, paper-based and computer-based tasks are all appropriate. During testing, observations, video analyses, eye-tracking methods, think aloud methods and log file analyses could help to understand students' way of thinking. Based on the paper, we plan to use a technology-based testing procedure and log file analysis in our investigations. A preliminary examination is necessary beforehand to study students' task solving behavior with eye-tracking method.

**Keywords:** combinatorial reasoning, enumerative combinatorial problems, thinking strategies, combinatorics strategies