

A nehézségi erőter szerkezete helyi fizikai és geometriai jellemzőinek vizsgálata, az Eötvös- és a Marussi-tenzor kapcsolata

ÁDÁM József – TÓTH Gyula – VÖLGYESI Lajos

DOI: 10.30921/GK.76.2024.2.1

Absztrakt: Az Eötvös- és a Marussi-tenzor a nehézségi erőter potenciálja szintfelületeinek fizikai, illetve geometriai tulajdonságait írják le. A vonatkozó elméleti összefüggések régóta ismertek, de az ezek gyakorlati alkalmazhatóságát igazoló, valós mérési adatok felhasználásával elvégzett számítások mindeddig hiányoztak. Magyarország korábbi, első gravimetriai főalappontján (az Oltay-ponton) és a jelenlegi, a Mátyás-hegyi-barlangban található országos gravimetriai főalapponton – részben saját méréseink alapján – rendelkezésre állnak a szükséges mérési adatok az ellenőrző számítások elvégzéséhez. Mindkét mérési ponton elemeztük a szintfelület és a függővonal fizikai és geometriai jellemzőit.

Abstract: The Eötvös and Marussi tensors describe the physical and geometrical properties of the level surfaces of the gravity potential. The relevant theoretical relationships have been known for a long time, but calculations using actual measurements to show their practical applicability have been missing. The necessary data – partly based on our own measurements – were available for numerical checks at the first gravity base point in Hungary (the Oltay point) and the current national gravity base point in the Mátyás Hill Cave. At both measurement points, the physical and geometrical properties of the level surface and the plumbline were analysed.

Kulcsszavak: Eötvös-tenzor, Marussi-tenzor, Oltay-pont, nehézségi gradiensek, függővonal, görbületi sugarak
Keywords: Eötvös-tenzor, Marussi-tenzor, Oltay-point, gravity gradients, vertical line, radius of curvature

Előszó

Ádám József akadémikus tanszéki munkatársaival készített utolsó publikációját olvashatjuk itt. Ádám József 2019 októberében a BME Rédeyszemináriumán tartott az Eötvös- és Marussi-tenzor kapcsolatáról előadást, amelyet követően elhatároztuk, hogy még további részleteket megvizsgálva írásban is összefoglaljuk a kutatási eredményeinket. Közbejött azonban a Covid-járvány. Ádám József a családjával együtt a város zajától távol, a Nógrád-megyei Tar községben lévő házában próbálta átvészelni a kritikus időket. Közben súlyos betegséget kapott, amelyet – reménykedve a gyógyulásban – példaértékűen viselt. Változatlanul tele volt tervekkel, és többek között dolgozott ennek a cikknek az elkészítésén is. Állapota 2022. december végére kritikussá vált, december 29-ei halála előtt néhány nappal még telefonon beszélgettünk, többek között arról, hogy amennyire az egészsége engedi, dolgozik a cikk anyagán. Ezt követő halála után kötelességünknek éreztük befejezni és megjelentetni a tanulmányt. Jeleképes véletlen, hogy Ádám József utolsó publikációja a Geodézia és Kartográfia utolsó nyomtatott számában jelenik most meg.

1. Bevezetés

Bár az Eötvös- és Marussi-tenzor elméleti összefüggései ismertek, amelyek a kézi- és tankönyvekben megtalálhatók (pl.: Homoródi 1966, Biró et al. 2013, Torge et al. 2023), de a mérésekből származó adatok mindeddig hiányoztak, amelyek viszont segíthették volna az összefüggések könnyebb megértését. Az egyetemi előadásaink során a Felsőgeodézia tantárgy keretében rendszeresen ismertettük az elméleti összefüggéseket, de mérési eredmények hiányában, adatokkal eddig nem tudtuk alátámasztani ezek gyakorlati alkalmazhatóságát. Többek között ezt a hiányosságot is kívánjuk most pótolni.

Korábbi, működésképtelen Eötvös-ingák javítását és felújítását követően lehetővé vált az abszolút g mérések mellett a vízszintes és a görbületi gradiensek pontos meghatározása, amelyeket kiegészítve vertikálisgradiens-mérésekkel, el tudtunk végezni olyan vizsgálatokat, amelyekre korábban nem volt lehetőség. Egyelőre csak néhány olyan ponttal rendelkezünk, ahol mérésekből ismerjük mindezeket az értékeket. Ilyen pont a BME Általános- és

Felsőgeodézia Tanszékén található Magyarország első gravimetriai főalappontja (az Oltay-pont) (Ádám et al. 2018), valamint a korábbi Eötvös Loránd Geofizikai Intézet (ELGI) Mátyás-hegyi Gravimetriai és Geodinamikai Observatóriumában (a Mátyás-hegyi-barlangban) található jelenlegi gravimetriai főalappont. Ezen kívül még a Csepel-sziget déli részén, Makád közelében is végeztünk 2008–2009-ben olyan terepi méréseket, ahol a pontokon a relatív graviméteres mérések mellett Eötvös-ingás és vertikálisgradiens-mérésekre is sor került (Csapó et al. 2009a, 2009b, Völgyesi et al. 2009a).

A gyakorlati számítások alapjául szolgáló Oltay-pont mérését és elemzését különösen fontosnak tartjuk, mivel Oltay Károly és Bodola Lajos ezt Eötvös Loránd kérésére és támogatásával azért létesítették, hogy Eötvös tudományos kutatásait szélső pontosságú felsőgeodéziai mérésekkel és adatokkal is alátámasszák, segítsék. Így az Oltay-pont néhány évvel ezelőtti felújítását követően, most – több mint 100 évvel később – végezhetünk gradiensméréseket és teljes körű differenciálgeometriai elemzéseket.

1. A nehézségi erőter geometriája

1.1 A nehézségi erőter helyi leírása

A nehézségi erőter a Föld körül sehol sem homogén. Az 1. ábrán két egymástól ds elemi távolságra lévő P és Q pontban látható a nehézségi erő g_P és g_Q vektora, illetve a két pont közötti dg változása (különbsége). A nehézségi erő dg elemi megváltozása bármely tetszőleges ds térbeli irányban egyszerűen meghatározható a:

$$dg = E ds, \quad (1)$$

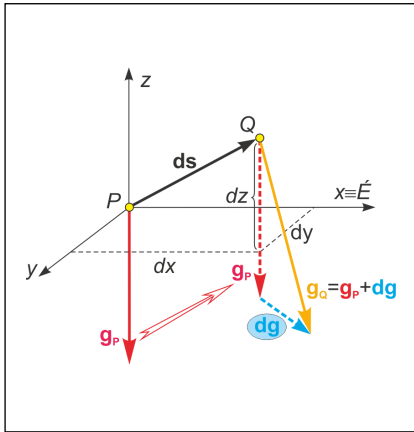
vagy az 1. ábrán látható térbeli derékszögű koordinátarendszerben a:

$$\begin{bmatrix} dg_x \\ dg_y \\ dg_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{xx} & W_{xy} & W_{xz} \\ W_{yx} & W_{yy} & W_{yz} \\ W_{zx} & W_{zy} & W_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} \quad (2)$$

összefüggéssel, ahol

$$E = \begin{bmatrix} W_{xx} & W_{xy} & W_{xz} \\ W_{yx} & W_{yy} & W_{yz} \\ W_{zx} & W_{zy} & W_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 W}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \end{bmatrix} \quad (3)$$

az Eötvös-féle tenzor, amely a nehézségi erő W potenciálfüggvényének második deriváltjait tartalmazza. A tenzorban szereplő $W_{\Delta} = W_{yy} - W_{xx}$ és W_{xy} görbületi gradiensek, valamint a W_{zx} és W_{zy} horizontális gradiensek Eötvös-ingával mérhetőek. A tenzor a parciális deriválás sorrendjének felcserélhetősége miatt szimmetrikus, mivel $W_{xy} = W_{yx}$, $W_{xz} = W_{zx}$ és $W_{yz} = W_{zy}$. A tenzorban szereplő gradiensek mértékegysége: 1 Eötvös ($1 E = 10^{-9} 1/s^2$).



1. ábra. A nehézségi erő két pont közötti megváltozása.

1.2 Szintfelületek és függővonalak görbületsége

A szintfelületek és a függővonalak görbületi viszonyai a potenciálfüggvény második differenciálhányadosaival jellemezhetők.

A 2. ábrán látható helyi vízszintes (érintő) síkú (balsodrású) x, y, z koordináta-rendszerben a szintfelületek x és y irányú görbülete (Biró et al. 2013):

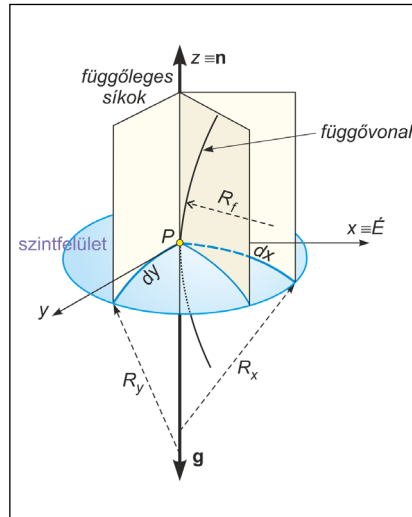
$$k_x = \frac{1}{R_x} = -\frac{1}{g} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = -\frac{W_{xx}}{g}, \quad (4)$$

$$k_y = \frac{1}{R_y} = -\frac{1}{g} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = -\frac{W_{yy}}{g}, \quad (5)$$

a középgörbület (átlaggörbület) pedig:

$$J = \frac{1}{2}(k_x + k_y) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y} \right) = -\frac{W_{xx} + W_{yy}}{2g}, \quad (6)$$

ahol R_x és R_y az xz , illetve az yz síkban lévő görbületi sugár (Torge et al. 2023).



2. ábra. A szintfelületek és a függővonalak görbülete

Tetszőleges A (szintfelületi) azimutú vertikális síkban a szintfelület görbülete:

$$k_a = \frac{1}{R_a} = -\frac{1}{g} (W_{xx} \cos^2 A + W_{yy} \sin^2 A + 2W_{xy} \sin A \cos A) \quad (7)$$

A legkisebb R_{min} (R_1) és a legnagyobb R_{max} (R_2) görbületi sugarak (Egyed 1956):

$$R_1 = g / (-W_{xx} \sin^2 \alpha - W_{yy} \cos^2 \alpha + W_{xy} \sin 2\alpha), \quad (8)$$

$$R_2 = g / (-W_{xx} \cos^2 \alpha - W_{yy} \sin^2 \alpha + W_{xy} \sin 2\alpha), \quad (9)$$

a legnagyobb görbületi sugár \hat{E} -i iránynyal bezárt szöge (α azimutja):

$$\tan 2\alpha = -\frac{2W_{xy}}{W_{yy} - W_{xx}}, \quad (10)$$

a Gauss-féle középgörbületi sugár pedig az R_1 és az R_2 geometriai középerkébe:

$$R = \sqrt{R_1 R_2} \quad (11)$$

A szintfelület legkisebb R_1 (R_{min}) és a legnagyobb R_2 (R_{max}) görbületi sugarainak ismeretében meghatározhatjuk a geofizikában ismert és használatos

$$R_b = g \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \sqrt{W_{\Delta}^2 - 4W_{xy}^2} \quad (12)$$

ún. *horizontális irányítóképességet*, ami nem más, mint a nehézségi erő forgatóképessége, amely pl. az Eötvös-féle torziós inga rúdját a legnagyobb R_2 görbületi sugarú főgörbület síkjába igyekszik fordítani (Völgyesi 2002). A horizontális irányítóképesség geofizikában szokásos R jelölése ellenére nem valamiféle görbületi sugár, hanem gradiens dimenziójú mennyiség.

A függővonal-meridián (xz) és rá merőleges (yz) síkra eső vetületének görbülete

$$\kappa_x = \frac{1}{g} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} = \frac{W_{xz}}{g}, \quad (13)$$

$$\kappa_y = \frac{W_{yz}}{g}, \quad (14)$$

míg a *függővonal teljes görbülete*

$$\kappa = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{g} \sqrt{W_{xx}^2 + W_{yz}^2} \quad (15)$$

A szintfelületek görbületi viszonyainak tanulmányozásához a potenciálfüggvény második differenciálhányadosainak ismerete szükséges. Ezeket gradiométeres mérésekkel, pl. Eötvös-ingával lehet meghatározni. A szintfelületek görbületi viszonyainak tanulmányozásával információt kaphatunk a szintfelületek alakjára vonatkozóan, megállapíthatjuk, hogy valamely szintfelületdarab alakja mennyire tér el a központos (centrális) erőter gömb alakú szintfelületétől. [Gömbre vonatkozóan, ugyanis, $R_x \equiv R_y$ és $W_{xx} \equiv W_{yy}$. A központos (centrális) erőter függővonalai pedig egyenesek (gömb sugarak), ugyanis $W_{xz} \equiv W_{yz} \equiv 0$].

1.3 A Marussi-tenzor és kapcsolata az Eötvös-tenzorral

Láthattuk, hogy a (3) Eötvös-tenzorban a nehézségi erőter potenciálfüggvényének második deriváltjai szerepelnek, így a tenzor a nehézségi erőterre vonatkozó különböző fizikai információkat tartalmazza.

$$\text{Az } M = \begin{bmatrix} k_x & t_x & \kappa_x \\ t_y & k_y & \kappa_y \\ \kappa_x & \kappa_y & -H \end{bmatrix} \quad (16)$$

Marussi-tenzor viszont ugyanazon nehézségi erőternek a geometriai tulajdonságait jellemző információkat foglalja magában, amelyben

$$k_x = \frac{1}{R_x} = \frac{W_{xx}}{g} \quad (17)$$

a szintfelület É-D irányú görbülete,

$$k_y = \frac{1}{R_y} = \frac{W_{yy}}{g} \quad (18)$$

a szintfelület K-Ny irányú görbülete,

$$t_x = t_y = -\frac{W_{xy}}{g} \quad (19)$$

pedig a *torzió* (Székely és Zsigri 1993). Továbbá

$$\kappa_x = -\frac{W_{xz}}{g} \quad (20)$$

a függővonal görbülete az *xz* síkban (É-D irányban),

$$\kappa_y = -\frac{W_{yz}}{g} \quad (21)$$

a függővonal görbülete az *yz* síkban és végül

$$H = k_x + k_y = -\frac{W_{zz}}{g} \quad (22)$$

az *összgörbület*.

A szintfelületek alakjának jellemzésére használjuk még a szintfelület

$K = k_x k_y - t_x^2 = k_1 k_2 = 1 / R_1 R_2$ (23) *szorzatgörbületét*, más néven *Gauss-görbületet* (Székely és Zsigri 1993).

A Marussi-tenzor (17-22) összefüggések szerint értelmezett elemeinek megfelelően a nehézségi erőter fizikai és geometriai tulajdonságait leíró Eötvös- és Marussi-tenzor között az alábbi egyenlőség írható fel:

$$E = \begin{bmatrix} W_{xx} & W_{xy} & W_{xz} \\ W_{yx} & W_{yy} & W_{yz} \\ W_{zx} & W_{zy} & W_{zz} \end{bmatrix} = -g \begin{bmatrix} k_x & t_x & \kappa_x \\ t_y & k_y & \kappa_y \\ \kappa_x & \kappa_y & -H \end{bmatrix} \quad (24)$$

A Marussi-tenzor elemei a szintfelület, illetve a függővonal különböző görbületeit jellemző számokat tartalmazzák, valamennyi tenzorelem mértékegysége 1/m. Ezért a Marussi-tenzor bármely elemét $-g$ -vel szorozva, az Eötvös-tenzorban szereplő gradienseket kapjuk. A tenzorban levő elemek SI mértékegysége $1/s^2$, de szokásosan ennek 10^{-9} -ed részét, az 1 Eötvös ($10^{-9} 1/s^2$) egységet használjuk. Amennyiben tehát a (24) összefüggésben a szorzásnál a g értéket $10^{-9} m/s^2$ egységben írjuk be, akkor a gradienseket E (Eötvös) egységben kapjuk.

2. Gravitációs és gradiometriai mérések Magyarország gravimetriai főalappontjain

Amint a bevezetőben említettük, két olyan pontunk van, ahol rendelkezésre állnak a gravitációs, illetve gradiométeres mérések, amelyek számunkra lehetővé teszik a Marussi-tenzor elemeinek és a szintfelületek valamennyi geometriai paraméterének meghatározását.

Az egyik pont a BME Általános- és Felsőgeodézia Tanszékének földszinti Rédey-tantermében (az egykori ingateremben) található vonatkozási pont, amely 1915–1955 között Magyarország első gravimetriai főalappontja volt (Oltay-pont) (Ádám et al. 2018). A másik pont a korábbi Eötvös Loránd Geofizikai Intézet (ELGI) Mátyás-hegyi Gravimetriai és Geodinamikai Observatóriumában (a Mátyás-hegyi-barlangban) található referenciapont, amely 1980 óta Magyarország gravimetriai főalappontja. Egyébként ugyanitt a korábbi ELGI munkatársai a főalapponthoz vezető barlangfolyosón 14 pontból álló mikrogravimetriai hálózatot is létesítettek. A pontokon relatív gradiométeres mérésekkel meghatározták a g értékeket, két különböző magasságban mérve meghatározták a W_{zz} vertikálisgradiens- (VG) értékeket és E54 ingával is mértek valamennyi ponton, de csak a W_{zx} , W_{zy} vízszintes gradienseket határozták meg.

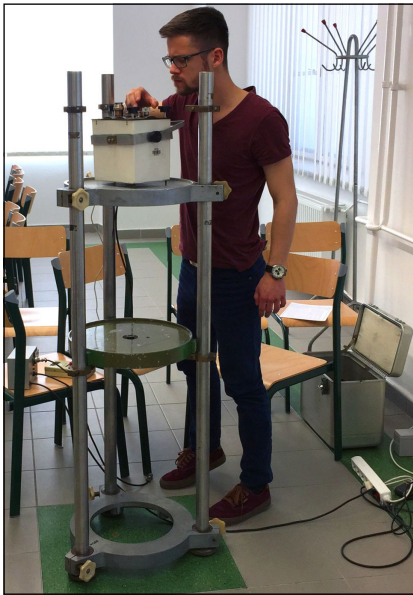
Említésre méltó, hogy a Csepel-sziget déli részén, Makád közelében is végeztünk 2008-2009-ben olyan terepi méréseket, ahol 18 ponton a relatív gradiométeres mérések mellett Eötvös-ingás és vertikálisgradiens-mérésekre is sor került, így a g mérések mellett a teljes Eötvös-tenzor elemei is ismertek (Csapó et al. 2009a, 2009b, Völgyesi et al. 2009a). Ezeknek a terepi méréseknek a pontossága némileg elmarad a két alapponton a laboratóriumi körülmények között végzett nagyszámú, ismételt mérés pontosságától, ezért egyelőre csak a két alappontra vonatkozó méréseket dolgoztuk fel.

Magyarország első gravimetriai főalappontját Oltay Károly a Műegyetem korábbi Geodézia Tanszékének professzora létesítette a Tanszék alagsori ingatermében (Ádám et al. 2018). Oltay 1915-ben a potsdami Geodéziai Intézet főalappontjának abszolút értékéből relatív ingamérések alapján vezette le a Műegyetemen az akkori pillér $g = 980\,852 \pm 3$ mGal értéket. Az ingatermet 2015 során felújítottuk, amelynek keretében az ingapontot azonosítottuk, és helyreállítottuk. Az alapponton 2016 májusában a cseh geodéziai observatórium (Pecný, Ondřejov) munkatársai FG5X-251 típusú abszolút gradiométerrel méréseket végeztek a nehézségi erő abszolút értékének újbóli meghatározása céljából. Az általuk meghatározott és az alappont mostani $104,253$ m Bf. magasságára átszámított $g = 980\,839\,225,7 \pm 4,4$ μ Gal érték megfelelő összhangot mutat az egykori Oltay-féle értékkel. A 3. ábrán az FG5X-251 típusú abszolút lézergradiométer látható mérés közben az Oltay-féle ponton.

Az egységes értelmezés miatt a g mért értékét a mérőműszerek mérési magasságáról minden esetben át kell számítani az alappont pontjelének magasságára, amihez viszont szükségünk van a nehézségi erő vertikális gradiensének (VG) értékére. A VG meghatározását az Oltay-ponton 2017-ben 3 pontos mérési módszerrel végeztük két különböző (LCR-G 220 és LCR-G 821) LaCoste & Romberg gradiométerrel A-B-C-B-A-B-C-B-A sorozatban (Ádám et al. 2018, Szekeres 2017). A 4. ábrán az Oltay-ponton végzett VG-mérés berendezése látható.



3. ábra. Mérés az FG5X típusú abszolút gradiométerrel az Oltay-féle ponton



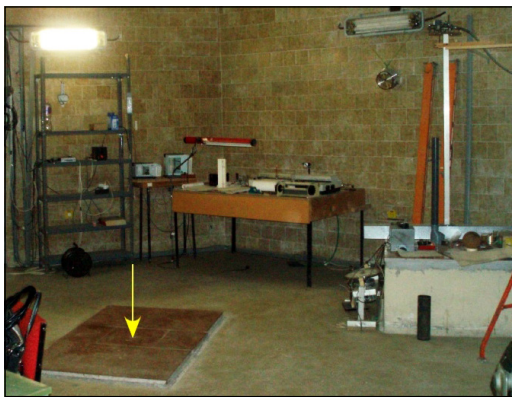
4. ábra. VG-mérés az Oltay-féle ponton

A vertikális gradiens értéke a kiegyenlítés után: $VG = 3091 \pm 31E$ ($309,1 \pm 3,1 \mu\text{Gal/m}$).

Az utóbbi időkben több okból is újra időszerűvé vált az Eötvös-ingák használata. Korábbi működésképtelen Eötvös-ingák javítását és felújítását követően lehetővé vált az abszolút g mérések mellett a vízszintes és a görbületi gradiens pontos meghatározása (Völgyesi et al. 2023) a szóban forgó két főalapponton.

Dátum	Inga	W_{Δ}	W_{xy}	W_{zx}	W_{zy}
2018.05.31	Pekár G-2B	53,7	5,6	14,7	-14,4
2018.06.04	Pekár G-2B	53,6	6,0	13,6	-14,4
2018.06.05	Pekár G-2B	59,7	4,4	14,9	-13,8
2018.06.05	Pekár G-2B	61,7	7,3	14,5	-14,5
2018.06.19	Auterbal	60,3	4,2	13,7	-14,2
2018.06.28	Auterbal	59,0	4,8	15,2	-13,5
2018.06.29	Auterbal	56,3	5,0	15,2	-13,7
2018.07.09	Auterbal	59,4	4,8	15,1	-12,9
átlag:		57,96	5,26	14,61	-13,93
szórás:		3,06	1,01	0,64	0,56

1. Táblázat. Eötvös-inga-mérések az Oltay-féle ponton (E egységben)



5. ábra. Gravimetriai főalappont a Mátyás-hegyi-barlagban.

Napjainkban Eötvös torziós ingái közül már csak néhány terepi mérésekre készített műszer hozzáférhető és tehető működőképes. A terepi mérések céljára kifejlesztett három legfontosabb műszer az Eötvös-Pekár-féle (Small original Eötvös G-2B), az Eötvös-Rybár-féle (Auterbal) és az ötvenes években gyártott E54 inga. Ezek közül jelenleg egy Eötvös-Pekár és három működőképes Auterbal-ingával rendelkezünk, és az ELGI jelenlegi jogutódja, az SZTFH tulajdonában is van egy működőképes E54 inga. Az ingák javítását és felújítását követően jelentős fejlesztéseket hajtottunk végre. A mérések legjelentősebb és legveszélyesebb hibaforrását, a közvetlen emberi jelenlétet a mérési folyamat teljes automatizálásával küszöböltük ki. A vizuális leolvasást megfelelő CCD-érzékelők alkalmazásával, digitális műszerleolvasással váltottuk fel, az ingák különböző mérési azimutokba állítását pedig számítógéppel távvezérelt forgatómechanika alkalmazásával oldottuk meg. Ezzel az elérhető leolvasási pontosságunk nagyjából két nagyságrenddel jobb, mint Eötvösök eredeti vizuális észlelésének becsült $10^{-9} 1/s^2$ pontossága (Völgyesi et al. 2023).

Az Oltay-ponton Pekár G-2B és Auterbal-ingával végeztünk összesen 8 mérést, amelyek eredményeit az 1. táblázatban foglaltuk össze.

A Mátyás-hegyi-barlagban, az 5. ábrán látható Gravimetriai és Geodinamikai Observatóriumban lévő 82. számú jelenlegi országos gravimetriai főalapponton végezték eddig Magyarországon a legtöbb abszolút g mérést különböző időpontokban, különböző lézergraviméterekkel. Ezek közül a legutolsó mérés $g = 9,808240266 \text{ m/s}^2$ értékét használtuk a számításainkban, mivel a tapasztalat szerint a korábbi g mérések eredményeiben mutatkozik a barlang alatti karsztvízszint egykori jelentősebb ingadozása.

A VG értékét a Mátyás-hegyi-barlagban lévő ponton szintén több alkalommal, különböző

graviméterekkel mérték, ezek alapján a $VG = 2519E$ ($251,9 \mu\text{Gal/m}$) értéket használtuk a számításainkban.

Ugyanitt E54 és Auterbal-ingákkal több mérést is végeztek, illetve végeztünk. Az egykori ELGI munkatársai E54 ingával csak a W_{zx} , W_{zy} vízszintes gradienseket határozták meg, mi viszont 2008 tavaszán Auterbal-ingával 10 méréssel valamennyi gradiens értékét meghatároztuk (Völgyesi et al. 2009b). A mérések alapján a gravitációs főalapponton $W_{\Delta} = -354,3 E$, $W_{xy} = -127,0 E$ a görbületi gradiens, valamint a $W_{zx} = -243,0 E$ és $W_{zy} = -172,4 E$ a horizontális gradiens értéke.

3. Mérési és számítási eredmények

Az Oltay-ponton és a Mátyás-hegyi-barlagban lévő jelenlegi gravimetriai főalapponton az ismert gravimetriai és gradiometriai méréseket alapul véve számításokat tudunk végezni a differenciálgeometriai jellegzetességek megállapítása céljából. Amint az előzőkben láthattuk, mindkét ponton vannak abszolút graviméterekkel mért g értékek, és LCR-graviméterekkel meghatározott W_{zz} vertikálisgradiens-értékek is. Emellett mindkét ponton voltak Eötvös-inga-mérések, amelyek eredményeként ismerjük a $W_{\Delta} = W_{yy} - W_{xx}$ és W_{xy} görbületi gradiens, valamint a W_{zx} és W_{zy} horizontális gradiens értékeit.

A vertikális gradiens nagy pontosságú gravimetriai mérésekkel meghatározott W_{zz} értéke és a

$$\Delta W = W_{xx} + W_{yy} + W_{zz} = 2\omega^2 \quad (25)$$

Laplace-egyenlet felhasználásával lehetővé vált a W_{xx} és a W_{yy} gradiens önálló értékeinek elkülönült meghatározása egyszerű aritmetikai műveletek elvégzésével.

A fentieknek megfelelően a kiinduló értékek, az Eötvös-tenzor elemei és a g nehézségi térerősség értékei az Oltay-ponton, a BME Általános- és Felsőgeodézia Tanszékén:

$$E = \begin{bmatrix} -1569,2 & 5,26 & 14,61 \\ 5,26 & -1511,2 & -13,93 \\ 14,61 & -13,93 & 3091,0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$g = 9,80839315 \text{ m/s}^2$$

$$\omega^2 = 5,32 E$$

és a Mátyás-hegyi-barlangban, Magyarország jelenlegi gravimetriai főalappontján:

$$E = \begin{bmatrix} -1077,0 & -127,0 & -243,0 \\ -127,0 & -1431,3 & -172,4 \\ -243,0 & -172,4 & 2519,0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$g = 9,808240266 \text{ m/s}^2$$

$$\omega^2 = 5,32 \text{ E}$$

Az alkalmazott (x, y, z) koordináta-rendszernek a kezdőpontja az észlelési pontban van, és ezért minden egyes észlelési pontnak saját külön koordináta-rendszere létezik. Ezek nem csak a kezdőpontban, hanem a tengelyek irányában is különböznek egymástól, mivel a z -tengely irányát megszabó vertikális (helyi függőleges) valamint az x -tengely irányát adó meridián is pontról pontra változik. A z -tengelyt a P pont vertikális irányában fölfelé, az x -tengelyt a P ponton áthaladó meridián síkjában Észak felé, az y -tengelyt pedig Kelet felé irányítottunk vesszük fel – így a koordináta-rendszerünk balsodrású.

A két állomás gradiensadatait szemlélve megállapítható, hogy eltérő fizikai/geofizikai sajátosságokkal rendelkeznek, és ennek következtében a két ponton áthaladó szintfelületek és erre a pontokon merőleges erővonalak geometriai jellemzői is különböznek. A gradiensadatok többségének számértékében egy nagyságrendbeli eltérés mutatkozik. A vertikális gradiens értéke az Oltay-ponton mindössze 5 E egységgel különbözik a 3086 E normális értéktől. Ugyanakkor a Mátyás-hegyi-barlangban lévő magyarországi gravimetriai alapponton ez az érték 2519 E, tehát a vertikális gradiens normálértékénél 567 E egységgel kisebb. A W_{Δ} adatokban mutatkozó eltérés is jól jelzi, hogy a Mátyás-hegyi-barlangban lévő ponton átmenő szintfelület sokkal nagyobb mértékben eltér a szabályos gömbfelület alakjától, mint az Oltay-ponton áthaladó szintfelületé.

A $\delta g / \delta s = W_{xx} = \sqrt{W_{xx}^2 + W_{yy}^2}$ teljes vízszintes gradiens értéke az Oltay-ponton 20,19 E, amely az $\alpha_s = \arctg(W_{yy}/W_{xx}) = 316,36$ -os azimutban a nehézségi térerősség vízszintes összetevőjének maximális változását mutatja. A Mátyás-hegyi-barlangban lévő pontban $W_{xx} = 297,94$ E a teljes horizontális gradiens értéke, amely

egy nagyságrenddel nagyobb az Oltay-ponton levő értéknél. Itt a nehézségi térerősség vízszintes összetevőjének maximális változása az $\alpha_s = 215,35$ fokos azimutban tapasztalható.

4. Az eredmények elemzése és értelmezése

A referenciapontokon áthaladó szintfelületek pontbeli k_x, k_y görbütségi adatai és k_p, k_2 főgörbületi mértékei, továbbá a J átlaggörbületi mérték is 10^{-7} nagyságrendűek.

A könnyebb áttekinthetőség és értelmezhetőség miatt a görbütségimérték-adatokból R_x, R_y, R_p, R_2, R_j görbütségi sugárértékeket számítottunk, mivel a geometriai jellemzők így jobban érzékelhetők.

Az Oltay-ponton a főgörbületi sugarak elég jól egyeznek, különbségük 243,657 km, tehát a szintfelület alakja bár eltér a gömbalaktól, de lényegesen kisebb mértékben, mint a Mátyás-hegyi-barlangban lévő pontban, ahol a megfelelő különbség 2802,962 km. Ezt jól mutatja az R görbületi mértékben meglévő nagyságrendnyi eltérés is, amit már korábban jeleztünk. A legnagyobb görbületi sugár azimutja $174,86^\circ$ az Oltay-ponton, illetve $162,18^\circ$ a Mátyás-hegyi-barlang pontjában.

A kétféle úton (6) szerint számolható J középgörbület (átlaggörbület) mindkét ponton egyezik egymással. Az Oltay-ponton:

$$J = 1/2(k_x + k_y) = 1/2(k_1 + k_2) = 1,57 \times 10^{-7},$$

és a Mátyás-hegyi-barlangban, Magyarország gravimetriai főalappontján:

$$J = 1/2(k_x + k_y) = 1/2(k_1 + k_2) = 1,28 \times 10^{-7}.$$

Az ezek alapján számolható átlaggörbületi sugár az Oltay-ponton 6370,587 km, illetve 7979,625 km a Mátyás-hegyi-barlangban. A 6371,009 km (GRS80) normális értéket az Oltay-pont értéke közelíti meg jobban (az eltérés csupán 422 m), a Mátyás-hegyi-barlangban lévő alapponton a középgörbületi sugár 1609,038 km-rel nagyobb. Ez azt is jelenti, hogy a Mátyás-hegyi-barlang pontján átmenő szintfelület kevésbé görbült, és jobban eltér a gömbalaktól ($R_n = 435,6$ E), mint az Oltay-ponton átmenő szintfelület ($R_n = 59$ E).

A (23) Gauss-féle görbület (K szorzatgörbület) kétféle úton számított értéke egyezik egymással, külön-külön mindkét ponton, amelynek értéke az Oltay-ponton $+2,464694 \times 10^{-14}$, a Mátyás-hegyi-barlang pontjában pedig $+1,585694 \times 10^{-14}$. A főgörbületi sugarak alapján számolt Gauss-féle középgörbületi sugár értékei: 6369,497 km az Oltay-ponton és 7941,276 km a Mátyás-hegyi-barlang pontjában. Mivel a Gauss-féle görbületi értékek nullától különböző pozitív számok, így mindkét felületi pont ellipszoidi.

Az Oltay-ponton átmenő felületi térgörbe torziója meridiánirányban (é-d.) $-5,3628 \times 10^{-10}$ 1/m, a térgörbe balszavarodású. (A torzió adott értéke a felületi görbe elcsavarodásának 1 km-re eső $0,111''$ -es szögváltozásával egyenértékű.) A Mátyás-hegyi-barlangban lévő ponton átmenő felületi térgörbe pontbeli meridián irányú torziója két nagyságrenddel nagyobb, $1,29483 \times 10^{-8}$ 1/m, a térgörbe itt jobbszavarodású (az 1 km-re eső szögváltozása $2,671''$). A felületi térgörbe torziója az Oltay-ponton nulla értéket vesz fel, a Mátyás-hegyi-barlang pontjában $A = 162,18^\circ \pm 90^\circ$ értékeknél.

Az Oltay-pont függővonalának görbütségi értékei 10^{-9} 1/m nagyságrendűek, a Mátyás-hegyi-barlangban egy nagyságrenddel nagyobb, azaz 10^{-8} 1/m nagyságrendűek. Ennek megfelelően egy nagyságrendnyi eltérés tapasztalható a görbütségi sugárértékekben is. Az Oltay-pont függővonalának görbütsége $2,05809 \times 10^{-9}$, a görbületi sugara 485887,4 km. A Mátyás-hegyi-barlangban lévő pont függővonalának megfelelő adatai $3,03769 \times 10^{-8}$, az $R_k = 32919,7$ km. Másféleképpen kifejezve, a függővonalhoz húzott érintő egyenes 1 km-en $0,43''$ irányszögváltozást mutat az Oltay-ponton, a Mátyás-hegyi-barlangban lévő ponton pedig $6,28''$ értéket. Mindkettő lényegesen eltér a normális értéktől, ami Budapesten, illetve Kékes-tetőn jó közelítéssel 1 km-en $0,171''$.

A szintfelületet helyettesítő felület (simuló paraboloid) lehajlása a P ponton a szintfelületet érintő síkhoz viszonyítva az $x = y = 100$ m elemi távolságra

az Oltay-pont esetén $z = -1,56$ mm, a Mátyás-hegyi-barlangban lévő ponton pedig $z = -1,41$ mm. A kettő közötti eltérés 0,15 mm.

Végül a fentieket összefoglalva a Marussi-tenzor elemei az Oltay-ponton, a BME Általános- és Felsőgeodézia Tanszékén:

$$M = \begin{bmatrix} 1,6 \times 10^{-7} & -5,3628 \times 10^{-10} & -1,4895 \times 10^{-9} \\ -5,3628 \times 10^{-10} & 1,54072 \times 10^{-7} & 1,42021 \times 10^{-9} \\ -1,4895 \times 10^{-9} & 1,42021 \times 10^{-9} & -3,14072 \times 10^{-7} \end{bmatrix}$$

és a Mátyás-hegyi-barlangban, Magyarország jelenlegi gravimetriai főalappontján:

$$M = \begin{bmatrix} 1,09809 \times 10^{-7} & 1,29483 \times 10^{-8} & 2,47751 \times 10^{-8} \\ 1,29483 \times 10^{-8} & 1,45932 \times 10^{-7} & 1,75771 \times 10^{-8} \\ 2,47751 \times 10^{-8} & 1,75771 \times 10^{-8} & -2,55741 \times 10^{-7} \end{bmatrix}$$

A Marussi-tenzor elemeit $-g$ -vel szorozva az Eötvös-tenzorban szereplő gradienseket kapjuk vissza, míg a Marussi-tenzor elemeinek reciprokát véve a szintfelület, illetve a függővonal megfelelő irányú görbületi sugarai számíthatók.

5. Összefoglalás

Az Eötvös- és a Marussi-tenzor a nehézségi erőter potenciálja szintfelületeinek fizikai, illetve geometriai tulajdonságait írja le. A két tenzor nem független egymástól, a tenzorelemek között egyszerű matematikai kapcsolat áll fenn, ezek egymásba egyszerűen átszámíthatók. Érdekes hasonlóság mutatkozik Newton és Einstein gravitációelmélete vonatkozásában. A Newton-féle elmélet a gravitációt fizikai fogalomként értelmezi, amely vonzó erőként hat két tömeg között, az Einstein-féle általános relativitáselmélet viszont a gravitációt nem fizikai erőterként, hanem a téridő görbületeként írja le, és értelmezi, tehát ebben az értelemben geometriai fogalomként kezeli.

A geofizikában és a fizikai geodéziában az Eötvös-tenzor használata indokoltabb a közvetlen fizikai tartalma miatt, a geometriai geodéziában viszont inkább a Marussi-tenzor használata lehet célszerűbb és szemléletesebb a geometriai tartalma miatt.

Tanulmányunk első részében áttekintettük a nehézségi erőter szerkezetének leírására szolgáló fizikai és geometriai összefüggéseket, és felírtuk az Eötvös- és a Marussi-tenzor kapcsolatát.

Ezt követően két mérési ponton mérési adatok felhasználásával határoztuk meg és tettük szemléletessé a különböző geometriai jellemzőket. Az egyik pont a BME Általános- és Felsőgeodézia Tanszékén található Magyarország első gravimetriai főalappontja (az Oltay-pont), a másik a korábbi Eötvös Loránd Geofizikai Intézet (ELGI) Mátyás-hegyi Gravimetriai és Geodinamikai Observatóriumában (a Mátyás-hegyi-barlangban) található jelenlegi országos gravimetriai főalappont. Mindkét ponton – nagyrészt saját méréseink alapján – rendelkezésünkre állt valamennyi szükséges mérési adat, az abszolút g mérések mellett az Eötvös-ingákkal meghatározott vízszintes és görbületi gradiensek, valamint vertikálisgradiens-értékek.

Tanulmányunkban megtalálható valamennyi szükséges mérési és számítási eredmény, valamint ezek elemzése és értelmezése. Az Oltay-pont és a Mátyás-hegyi-barlangban lévő pont között a görbületi értékekben mutatkozó érdemi eltérések magyarázata geológiai-geofizikai szempontból is érdekes. Az Oltay-pont síkságon, a nem túl nagy tömegű Gellért-hegytől viszonylag nagyobb távolságban és egy kisebb tömegű épület belsejében van, a másik viszont a Mátyás-hegy belsejében, nagy tömeg-rendelenségekkel körülvéve, ráadásul a pont közvetlen közelében magas, meredek sziklafal is található, ami magyarázhatja a nehézségi erőter változatosabb szerkezetét és a nagyságrendileg nagyobb görbületet.

Irodalom

- Ádám J. – Rózsa Sz. – Tóth Gy. – Völgyesi L. 2018. Magyarország 100 évvel ezelőtt létesített első gravimetriai főalappontjának újramérése a Műegyetemen. Geodézia és Kartográfia 70. évf. 2. sz. pp. 4–14.
- Biró P. – Ádám J. – Völgyesi L. – Tóth Gy. 2013. A felsőgeodézia elmélete és gyakorlata. HM Zrínyi Térképészeti és Kommunikációs Szolgáltató Nonprofit Kft. Kiadó, Budapest. Egyetemi tankönyv és kézikönyv, ISBN 978-963-257-248-2, p. 508
- Csapó G. – Égető Cs. – Kloska K. – Laky S. – Tóth Gy. – Völgyesi L. 2009a. Graviméteres és Eötvös-inga mérések a Csepel-sziget déli részén. Geomatikai Közlemények, XII.
- Csapó G. – Laky S. – Égető Cs. – Ulmann Z. – Tóth Gy. – Völgyesi L. 2009b. Test measurements by Eötvös torsion balance and gravimeters. Periodica Polytechnica Civil Engineering, 53. évf. 2. sz., pp. 75–80.

- Egyed L. 1956. A Föld fizikája, Akadémiai Kiadó, Budapest.
- Homoródi L. 1966. Felsőgeodézia. Tankönyvkiadó, Budapest.
- Szekeress Sz. 2017. Vertikális gradiens meghatározása az Oltay-féle gravitációs alapponton. MSc Diplomamunka, BME Általános- és Felsőgeodézia Tanszék, Budapest.
- Székely J. G. – Zsigri G. 1993. Differenciálegyenletek és differenciálegeometria. BME, Építőmérnöki Kar, Matematika Tanszék, jegyzet.
- Torge, W. – Müller, J. – Pail, R. 2023. Geodesy. 5. átdolgozott kiadás, De Gruyter Oldenbourg, ISBN 13-978-3110723298.
- Völgyesi L. – Csapó G. – Laky S. – Tóth Gy. – Ulmann Z. 2009a. Közél fél évszázados szünet után ismét Eötvös-inga mérések Magyarországon. Geodézia és Kartográfia, 61. évf. 11. sz., pp. 3–12.
- Völgyesi L. – Égető Cs. – Laky S. – Tóth Gy. – Ulmann Z. 2009b. Eötvös-inga felújítása és tesztmérések a budapesti Mátyás-hegyi-barlangban. Geomatikai Közlemények, XII, pp. 71–82.
- Völgyesi L. – Szondy Gy. – Tóth Gy. – Fenyvesi E. – Kovács P. – Kiss B. – Égető Cs. – Barnaföldi G. G. – Lévai P. – Ván P. 2023. Eötvös-ingák felújítása és továbbfejlesztése, jel-zaj viszonyaik elemzése; Fizikai Szemle LXXIII(12), pp. 416–422.
- Völgyesi L. 1982. Geofizika. Tankönyvkiadó, Budapest.



†Dr. Ádám József
1953–2022

BME Általános- és Felsőgeodézia Tanszék
<http://epito.bme.hu/adam-jozsef>



Dr. Tóth Gyula
egyetemi docens

BME Általános- és Felsőgeodézia Tanszék
toth.gyula@emk.bme.hu
<http://epito.bme.hu/toth-gyula>



Dr. Völgyesi Lajos
professor emeritus,
az MTA levelező tagja

BME Általános- és Felsőgeodézia Tanszék
volgyesi@eik.bme.hu
<http://epito.bme.hu/volgyesi-lajos>
<http://www.agt.bme.hu/volgyesi/>