Gyermeknevelés Tudományos Folyóirat
12. évf., 2. szám 225–241. (2024)
https://doi.org/10.31074/gyntf.2024.2.225.241

A matematikai fogalmak, módszerek fejlesztésének hosszú útja

Pintér Marianna

Eötvös Loránd Tudományegyetem Tanító- és Óvóképző Kar, Matematika Tanszék

Absztrakt

Magyarországon a matematikatanítás spirálisan épül fel, az egyes matematikai tartalmak vissza-visszatérnek a közoktatás folyamán. A tizenkét (esetenként tizenhárom) tanév során egy adott tartalomhoz kapcsolódó fogalmak köre bővül, a fogalmak egyre precízebbek lesznek, kialakul a definíciónak az adott absztrakciós szinthez illeszkedő szabatossági foka. A fogalmak terjedelmének és mélységének bővülésével a használt eljárások köre is szélesedik. A hosszú út során a tartalmakat összefüggő fogalomépítési folyamatként kezeljük, a spiralitás elvének megfelelően időről-időre egyre magasabb szinten érintünk egy-egy fogalmat. Ellenkező esetben a spiralitás nem segíti a matematikai fogalmak épülését, a fogalomcsírák különállóak maradnak. Áttekintésemben egy-egy konkrét matematikai tartalmon keresztül mintákat mutatok a hosszú út módszerére.

Kulcsszavak: matematikai gondolkodás, hosszú út, kisgyermekkor, általános iskola, középiskola, cselekvésen alapuló koncepcióalakítás

Bevezetés

Pályafutásom során több különböző környezetben találkoztam a hosszú út módszerének gondolatával. Egyrészt témavezetőm Deák Ervin (Deák, 1985, 1991), másrészt mentoraim Vásárhelyi Éva (Vásárhelyi, 2006) és C. Neményi Eszter (C. Neményi, 2002) hívta fel figyelmemet a fogalomépítés folyamatosságának fontosságára.

Az emberek nagy többsége nem gondolja, hogy egy-egy mondat megfogalmazásának hatása van a gyermek matematikai gondolkodásának fejlődésére. A *matematika* szó hallatán leggyakrabban a matematika órák elszenvedése, megoldhatatlan feladatokon való gyötrődés, ködös definíciók, és felfoghatatlan tételek „bebiflázása" jut az eszükbe. Úgy gondolják, hogy ezzel a rettenetes tárggyal az iskolában volt dolguk, később nem is kell találkozniuk vele, nem használják a matematika órán tanultakat semmire. Eszükbe sem jut, hogy a matematikai gondolkodást megalapozó értelmi műveletek, a megismerő kognitív funkciók – megfigyelés, érzékelés, észlelés, emlékezés, képzelet, gondolkodás – fejlődése születésünkkor kezdődik, és ezek formálá-

CC BY NC SA

sában, fejlesztésében milyen óriási szerepe lehet(ne) a matematikai nevelésnek, matematikai tevékenységeknek.

Ebben az írásban az ismeretszerzés megfelelő módjai közül választok egyet, a *hosszú út módszerét*, konkrét példákon mutatom be azokat a főbb állomásokat, amelyeken át az út vezet.

Számos tanuláspszichológiai érv szól a hosszú út módszere mellett (például Piaget, 1999, 2004; Rimat, 1925; Vigotszkij, 2000). Rimat kutatási következtetését Vigotszkij (2000) így idézi: „… A szemléltető momentumoktól elszakított fogalmakban való gondolkodás olyan követelményeket támaszt a gyerekkel szemben, amelyek tizenkét éves kora előtt pszichológiai lehetőségeit túlhaladják." (Vigotszkij, 2000). A matematika tanulás szubjektív feltételei (érzelmi és értelmi érettség) minden egészséges gyermekben kialakulnak. Rendelkeznek azokkal a tulajdonságokkal, képességekkel, amire egy matematikával foglalkozó személynek alapvetően szüksége van. A tárgy-, tér-, mozgás- és időérzékelés csírája már lényegesen korábban, tulajdonképpen az anyaméhben kialakul. A beszéddel a *szimbolikus gondolkodás* is megindul. Ezzel egy időben megjelenik az *információgyűjtés és* a *felfedezés igénye* (fiókokban, szekrényekben kutató tendencia), a *ráfigyelés, a tartós vizsgálódás,* illetve a *pontos megnevezés igénye* (Mi ez?) (Kis, 2001).

Megfelelő nevelői munka szükséges ahhoz, hogy a gyermek gondolati tevékenysége – az előzetes gondos *megfigyelés* és pontos *megállapítások*, a *tapasztalatokkal történő összevetés*, tárgyak, személyek tulajdonságainak összehasonlítása, megkülönböztetése, és a lényegesek kiemelése – már óvodás korban jól fejlődjön.

Az iskolába lépéskor azonban még hiányzik a tudatos tapasztalatszerzés, a *megfelelő módon szerzett és feldolgozott ismeret*.

A hosszú út folyamán a személyes, cselekvő tapasztalatszerzésből kell kiinduljon a tanulás. A megfelelő eszközökkel végzett tevékenységnek kettős szerepe van, egyrészt a különféle helyzetekben megtapasztalt konkrét tények és a köztük levő sokszínű viszonylatok közös lényegéből belsővé válnak (interiorizálódnak) a fogalmak. Másrészt a tevékenység során külső képsorként megjelenő problémamegoldási folyamat belsővé, gondolkodási folyamattá válik. A hosszú út folyamán az egyik legfontosabb szempont tehát a gyermek életkori sajátosságainak szem előtt tartása, írja C. Neményi Eszter Varga Tamás halálának 25. évfordulójára írt cikkében (C. Neményi, 2013, p. 133). „Az agykutatás eredményei alátámasztják, hogy gyerekkorban csak az észleleteket képes mozgósítani az ember, csak a képeket, eljátszott történéseket képes felhasználni gondolkodásában, s nem a hozzá kapcsolódó szavak, nem a róluk szóló mondatok mobilizálódnak. …. A verbális vagy írott jelekhez először képeket, átélt élményeket kell előhívnia 6–12 éves korában, hogy azzal kezdhessen valamit. Ha hiányzik a kép, akkor a szó nem lesz való semmi értelmi tevékenységre. (1. ábra)" (C. Neményi, 2018)

1. ábra
A beszéd és a gondolat közötti kapcsolat 12 éves kor alatt
Forrás: C. Neményi Eszter (2018)

Összegezve: a hosszú út minden lépése cselekvéseken, tevékenységen alapuló tapasztalatszerzést, fogalomépülést tesz lehetővé.

A hosszú út bemutatása példákon keresztül

Első példa: A halmazelméleti fogalmak fejlődése

Az óvodás kor előtt

A kisgyermek születése pillanatától megkülönbözteti, szétválasztja a számára fontos, őt körülvevő dolgokat, ételeket, ruhákat, tárgyakat, személyeket. Már a beszéd megkezdése előtt világosan szülei tudtára adja:

- mely ételeket szereti – nem szereti,
- melyik ruhát akarja felvenni – melyek azok, amelyekről hallani sem akar,
- kik azok, akik éppen ölbe vehetik, kommunikálhatnak vele – kik azok, akik nem részesülnek ebben a kegyben,
- melyik játékkal szeretne játszani – melyik az, amelyik szóba sem jöhet,
- melyik mesét szeretné hallani stb.

Vagyis az egy – *saját* – szempont szerint kétfelé választás igénye, tudása velünk született képesség.

Óvodás korban

A szeretem – nem szeretem, tetszik – nem tetszik, illetve további szubjektív szempontok mellett, nagyjából hároméves kor körül megjelennek az objektív szempontok is. Például a színek tanulása során megkezdik az ugyanolyan színű reláció mentén az egy szempont szerint több felé válogatást, azaz konkrét tárgyi tevékenységgel megjelenik az osztályozás kezdete. A gyermek gyöngyök, gombok, játékok, tárgyak spontán válogatása során, minden tulajdonságot (anyag, méret, funkció stb.) figyelmen kívül hagy. Arra az egyre koncentrál, ami az adott pillanatban számára fontos: a színre. Míg ezt teszi a korábban említett agyi tevékenységek – *ráfigyelés, tartós vizsgálódás, gondos „elemzés”* és *pontos megállapítások, korábbi tapasztalatokkal történő összevetés,* az összehasonlítás, megkülönböztetés, a lényeges tulajdonságok kiemelése – mindegyike elkezd fejlődni, működik. Megkezdődik a címkézés is, piros, kék, sárga stb.

A spontán válogatások mellett megjelennek az óvópedagógus által *megadott szempont szerinti* válogatások is, adott szempont szerint többfelé, később kétfelé. Válogatás aszerint, hogy kikre, mikre igaz, kikre, mikre nem igaz a mondott tulajdonság. Vagy például egy az állatok megismerése céljából tervezett foglalkozás alatt válogathatják az állatokat

– több felé: kültakarója alapján (szőr, pikkely, toll, ...), szaporodása alapján (eleven szülő, tojást rak, ...), természetes élőhelye alapján (vízben él, szárazföldön él, …), illetve
– válogathatják két felé: testét szőr borítja vagy nem, eleven szülő vagy nem, tud a vízben lélegezni vagy nem stb.

Az elemek közös tulajdonságán kívül fontossá válik az is, hogy az adott csoportba hány elem tartozik, a csoport számossága a darabszám-érzet fejlődése felé nyitja az utat (az ugyanannyi reláció mentén).

Az alsó tagozaton

A halmaz-logika témakör egyik központi fogalmát az állítások (ítéletek) jelentik. Konkrét dolgokkal – például logikai készlet néhány elemével – végzett tapasztalás-sorozatokon keresztül fejlesztjük az állítások megfogalmazását, az állítások igazság értékének meghatározását és az elemek halmazokba rendezését. A folyamat három fő egymásra épülő tevékenységköre: konkrét dolgokra vonatkozó elemi állítások megfogalmazása; konkrét dolgokra, személyekre vonatkozó állítás logikai értékének meghatározása (igaz, nem igaz), majd halmazok alkotása adott szempont szerint, illetve hibás halmazok javítása. Néhány tevékenység, a halmazszemlélet alapozására, az előző lépések mentén csoportosítva.

A. Konkrét dolgokra vonatkozó elemi állítások kimondása
Második évfolyamon például:

– A gyermek adott személyről, dologról fogalmaz meg igaz, illetve nem igaz állításokat.
– A logikai készlet egy lapjának felmutatásakor, megfogalmaz igaz állításokat, ezzel az elemet jellemzi. (Milyen tulajdonsága van még?)

B. Állítások logikai értékének megítélését gyakoroltató tevékenységek lehetnek:

– Válogatást végez a gyermek aszerint, hogy mely lapokra igaz, melyekre nem igaz a mondott tulajdonság. Ennek jó eszköze a barkochba, amely többféle szabállyal játszható.

  - Barkochba oly módon, hogy a gyerekek által konkrét, felmutatott elemekre a játékmester „igen", „nem" válaszokat ad, amely alapján az elemeket kétfelé rendezik, és az „igen" besorolású elemek közös tulajdonságát keresik.
  - Hazudós barkochba, ahol az „igen" helyett „nemet" mondunk és fordítva.

- Néhány elemből álló akár véletlenszerűen összeállított együttes jellemzése állításokkal, a közös tulajdonságok felismerése és megfogalmazása.

  - A kiválasztott dolgok a gyerekek elé kerülnek; kezdetben a tanító, később egy-egy gyermek igaz, hamis állításokat fogalmaz meg a sokaságról, amelyekről a gyermekek önállóan eldöntik, hogy az állítás az adott elemekre igaz-e vagy sem.
  - Az alaphalmazból elemek válogatásával tesz nyitott mondatokat kérésnek megfelelően igazzá, vagy nem igazzá.

- Amennyiben egy adott halmaz elemeire nem igaz egy állítás, kérésre a gyermek a halmaz elemeit módosítja (néhányat esetleg kivesz, néhányat esetleg hozzátesz a halmaz már meglévő elemeihez), amíg a keletkezett új halmaz elemeire igazzá válik az állítás.

C. Halmazok alkotását lehetővé tevékenységek például:

- Különböző készletek összeállítása tanító által megadott szempont szerint, ilyen szempont lehet például:

  - legyen benne piros,
  - mindegyik háromszög legyen,
  - ne legyen benne kicsi elem.

- A tanító által adott hibás válogatás javítását lehetővé teszik például a „Kakukktojás-játékok".
- Illetve a megkezdett válogatás folytatása. A kiválasztott elemek – valamely – közös tulajdonságának felismerése után, ilyen tulajdonságú további elemek keresésével folytatja a gyermek a megkezdet válogatást.

Ugyanezt a folyamatot követve a konkrét dolgokkal végzett válogatások, és a rájuk vonatkozó ítéletalkotások után áttérhetünk az elvontabb fogalmakon végzett válogatásokra, ítéletalkotásokra. A 3. évfolyamon lehetséges tevékenységek például:

- Szócédulák szétválogatása: tartalmi, vagy akár nyelvtani szempont alapján.

  - Számok szétválogatása különféle szempontok szerint többfelé például számtulajdonságok szerint, ami lehet paritás, jegyek száma, valamivel való oszthatóság, végződés stb. Illetve kétfelé válogathatják az elemeket bármely tulajdonság és tagadása alapján.
  - A korábban említett barkochba játszható számkártyákkal.

- Egy számhalmaz elemeit vizsgálva meghatározó közös tulajdonság keresése és megnevezése után a talált tulajdonság ellenőrzése külön-külön mindegyik elemre.
- Fordított barkochba számokkal: különféle alaphalmazok kétfelé válogatása után az együvé választott számok közös, és a különválasztottak eltérő tulajdonságának keresése.
- Adott válogatások címkéinek (közös tulajdonságának) meghatározása.
- Elrontott válogatások javítása; „Kakukktojás" játékkal.
- Halmazos barkochba, amelyben egy elemcsoportra gondolunk, és az összességre vonatkozó kérdésekre válaszolunk „igennel" vagy „nemmel". (A kvantoros, azaz a „minden" és „van olyan" típusú állítások értelmezéséhez)

A fent leírtakra számos konkrét és részletesen leírt tevékenység található C. Neményi Eszter és munkatársai által alkotott Építsük fel! *I–IV. Matematikai gyűjteményekben* és *Matematika munkáltató feladatlapokban* (C. Neményi és mtsai. 2021-2023), illetve az *Útjelző az 1.- 2. osztályos matematika tanításához köteteiben* (C. Neményi, Sz. Oravecz 1993, 1994).

Felső tagozaton

Folytatjuk az alsó tagozaton számokkal, síkidomokkal, testekkel, halmazokkal, stb. megkezdett munkát. Valahányszor egy új fogalom bevezetésére kerül sor, szükséges az adott dolog minél behatóbb vizsgálata (például síkidomok oldalainak száma, átlóinak száma, oldalainak egyformasága, illetve különbözősége, szögeinek nagysága, szimmetria-tulajdonságai stb.). Aztán az így megismert elemeket szintén osztályozhatjuk a megismerés során felfedezett használt tulajdonságok alapján. A halmazokat Venn-diagram segítségével ábrázoljuk. Felső tagozaton szintén konkrét halmazokra használjuk a két halmaz *metszete, egyesítése* (uniója) szavakat, a *kiegészítő halmaz* elnevezés is megjelenik, de kizárólag konkrét halmazra vonatkozóan.

A spirális építkezés célja, hogy a kialakulóban lévő matematikai fogalmak (halmaz, eleme, nem eleme, részhalmaz, komplementer-halmaz, unió, metszet, különbség-halmaz, halmaz számossága) megfelelő tapasztalati bázison (induktív úton) bővüljenek.

Középiskolában

A 14-15 év *alatt tapasztalati úton fejlődött halmazelméleti fogalmakat* a kilencedik évfolyamon definiáljuk, matematikailag formalizáljuk, de a hosszú út elve alapján ezek a fogalmak sem tekintendők lezártnak.

Második példa: a szöveges problémáktól az egyenletekig, egyenletrendszerekig

A szöveges problémák egyik fontos eleme az igazsághalmaz (értelmezési tartomány) vagyis azon elemek csoportja, amelyek megoldást jelenthetnek egy-

egy szövegben megfogalmazott problémára. Arra a kérdésre, hogy „Hány gyerek ment el a múzeumba?" nem lehet a válasz sem tört-, sem negatív szám. Mint ahogy arra a kérdésre: „Hány elem felhasználásával tudjuk lefedni az alakzatot?" szintén nem lehet a megoldás negatív szám. Az értelmezési tartomány megtalálásához járul hozzá a hosszú út módszere. Egy szöveges probléma tényleges eredményének meghatározására számos lehetőség van például következtetés, fordított gondolkodás stb., a legelterjedtebb útja az egyenlettel történő megoldás. Az egyenlet és megoldása minden életkorban mást jelent.

Formailag bármely két egyenlőségjellel összekapcsolt kifejezést egyenletnek tekinthetünk, amelynek vagy nincs megoldása, vagy néhány megoldása van, vagy az alaphalmaz minden eleme a megoldása. Ha egyenletről van szó leggyakrabban olyan speciális hiányos állításra (később nyitott mondatra), azaz a változótól, változóktól függő állításra gondolunk, amelynek alaphalmaza valamilyen számhalmaz.

Az iskolában matematikailag kétféleképpen értelmezzük az egyenleteket.

Egyrészt függvényértékek egyenlőségeként. Ebben a felfogásban az egyenlőségjel két oldalán egy-egy függvény áll. Az egyenlet megoldásának (gyökének) az alaphalmaz azon értékeit tekintjük, amelyekre a reláció jel bal és jobb oldalán szereplő függvények helyettesítési értéke megegyezik.

Másrészt logikai függvényként. Ebben a felfogásban az egyenlet egy logikai állítás. Az egyenlet megoldásakor az alaphalmaz mindazon értékeit keressük, amelyekhez az igaz logikai érték tartozik. A változó(k) ezen értékeinek halmazát az egyenlet igazsághalmazának nevezzük.

Az egyenletmegoldáshoz vezető utat két irányból kell előkészítenünk. Az egyik irány a szövegértés és a matematikai logika elemeinek használatát követi, a másik irány pedig valamely egyenletmegoldási módszer használatához szükséges ismeretek, rutinok kialakítása.

Az óvodás kor előtt

Ebben az életkorban azt gondolnánk, hogy semmi olyan nem történik a kisgyermek mindennapjaiban, amelyek az egyenletek megoldásához hozzájárulna. Pedig a kisgyermek képes a változások észlelésére, megfigyelésére, és a műveletekhez kapcsolódó kifejezések tartalmának megismerése már megkezdődik.

- „Elég lesz ennyi, vagy kérsz még?"
- „Ha szeretnél, vegyél el még egyet!"
- „Elrepült egy madár, de nézd, maradt még három."
- „Ne legyél önző! Osszátok el!"

Vagyis a gyermek megteszi a szöveges feladatok megoldásához szükséges első lépést értelmezi a szöveghez tartozó hétköznapi szituációt, megérti a szituációban megjelenő változást, azaz a műveletet és a kijelentés logikai értékét.

Az óvodás korban

Három és hatéves kor között a tudatos nevelői munka hatására fejlődik a hallott szövegértés és a relációsszókincs. *A verbálisan közvetített, játékba/tevékenységbe ágyazott hétköznapi problémahelyzetekre a gyermek megfelelő motiváció mellett, eszközök segítségével, tevékenységgel keresi a megoldást.* A szöveges feladatok és egyenletek témaköréhez kapcsolódó problémahelyzetek az óvodai matematika témakörei közül leginkább számfogalom alapozásának köréhez (darab- és mérőszám tartalommal egyaránt), illetve a szorosan ide tartozó műveletek köréhez kapcsolódik.

A tevékenységek során a gyermek értelmezi az elhangzott szöveget/utasítást, és tevékenység segítségével megjeleníti, és megoldja a szövegben közölt problémát.

- Szabadjáték során:
  - Nézd csak! Mi változott? Kártyajáték a változás megfigyelésére
  - Tanulom a súlyokat, Janod fajáték, a mérleg mozgásának megfigyelésére, és az „ugyanolyan nehéz” többféle megjelenítésének megértésére.
  - Balance Beans - logikai játék, a mérleg mozgásának egy másik típusú megfigyelése, és az „ugyanolyan nehéz” többféle megjelenítésének megértése. A játék tartalmaz egy libikókát, három-három 1, 2, illetve 3 egység nehézségű babot, továbbá 40 feladatkártyát. A játék során a gyermek húz egyet a kártyákból, és a képnek megfelelően elhelyezi a babokat a libikóka egyik oldalán. A másik oldalra a maradék babokat kell feltenni úgy, hogy a libikóka egyensúlyi állapotba kerüljön. Mivel előfordul, hogy az egyik típusú babból nincs elég, az egyensúlyi állapotot csak úgy lehet elérni, ha az erőkart figyelembe vesszük, azaz a babszem pozícióját is módosítjuk.
  - Játék mérleg használata például szerepjáték során.
- Munka jellegű tevékenység során, például terítésnél: „Ugye emlékszel, hogy ma Zoli nem jött óvodába?” mondat elhangzása után a napos pontosan tudja, hogy eggyel kevesebb terítékre van szükség, mint ahány hely van az asztalnál.
- Tervezett tevékenységnél:
  - Számfogalom alapozása darabszám tartalommal, bontott alakban: például „Vegyél ki hat termést úgy, hogy pontosan kétféle legyen a kezedben!”, Helyesen értse és alkalmazza a feladatokban a „valamenynyivel” több, kevesebb fogalmakat: például „Most vegyél ki úgy hat termést, hogy az egyik féléből kettővel több legyen, mint a másikból!” stb.
    - Változás megfigyelése a művelet előkészítéséhez: például: Az óvodapedagógus kihív három gyermeket, és egymás mellé állítja őket.

Ezután megkéri a gyerekeket, hogy figyeljék meg őket jó alaposan, és tapsra csukják be a szemüket. A taps után például *a három gyerek közül kettő helyét cserél, az egyik gyerekre ráad egy ruhadarabot (például sapka, kendő, kardigán), az egyik gyerek kezébe ad egy játékot stb*. ezután a gyermekek megmondják, ha kinyitották a szemüket, hogy mi változott meg.

- Könnyebb nehezebb érzékelése:
  - csukott szemmel szerez tapasztalatot arról, hogy azonos anyag esetén a nagyobb nehezebb, különböző anyagok esetén lehet a kisebb a nehezebb,
  - nyitott szemmel megfigyeli, hogy a vállfamérleg, kétkarú mérleg hogyan billen, és saját testen eljátssza nagyon eltérő tömegű tárgyakkal
  - vállfamérlegen, kétkarú mérlegen az egyensúlyi helyzet létrehozása apróbb tárgyakkal
  - az egyenlő változtatás megfigyelése: egyensúlyi helyzetből indulva, ha egyenlőket teszünk a mérleg két oldalára, vagy veszünk el, az egyensúly fennmarad.

A tevékenységek kapcsán fejlődik a gyermek megfigyelőképessége, számérzete, számfogalma, relációszókincse a több-kevesebb-ugyanannyi, illetve könnyebb-nehezebb-ugyanolyan nehéz, továbbá az egyenlő, a mennyivel több-kevesebb, és mennyivel nehezebb-könnyebb kapcsolatok mentén.

Az alsó tagozaton

Az első két évfolyam során megszerzi a gyermek mindazt a tudást, amelyre szüksége van ahhoz, hogy megoldja a szöveges formában kapott, matematikai tartalmát tekintve az $x+a=b$ $(a;b \in N)$ típusú egyenletekre vezető feladatokat, és megkezdi azt az utat, amely az egyenlet formális megoldásához fog vezetni.

Hogyan néz ki a fent leírt egyenlet az első évfolyamon? Például

Gondoltam egy számot, hozzáadtam kettőt, eredményül kilencet kaptam. Melyik számra gondoltam?

A feladat során fejben történő számolással – avagy mondjuk számegyenesen lépkedéssel – megkeresi azt a számot, amelyiknél kettővel nagyobb a kilenc. Vagy visszafelé gondolkodik, vagy elvégzi a mérlegelv alkalmazásához szükséges szemlélet váltást: azt a számot keresi, amelyik kettővel kisebb, mint a kilenc.

A második osztályos már nagyobb számkörben fog dolgozni esetleg kissé összetettebb szöveggel:

> „Ákos zsebében 29 kaviccsal kevesebb van, mint Balázséban. Hány kavics van Ákosnál, ha Balázsnál 55 van?" (Építsük fel! Matematika munkáltató feladatlapok 2. osztály, 110. oldal 8/a.)

A másodikos számára ez egy számfeladat: Ákos kavicsainak száma = Balázs kavicsainak száma - 29. Egyenlettel úgy is fel lehet írni a szövegben leírt összefüggést, hogy Ákos kavicsait pótoljuk, hogy egyenlő legyen Balázs kavicsaival. Ekkor az $x+29=55$ egyenlethez jutunk. Az itt megszerzett tudás lesz a következő alapköve az $x+a=b$ ($a;b\in N$) típusú egyenletek megoldásának. Természetesen a számfeladatok nem állnak meg az ismeretlen mennyiséghez történő hozzáadásnál. Így az $x\cdot a=b$; $x:a=b$;$x/a=b$; formájú egyenletek megoldásának alapozása is megkezdődik!

Eszközök segítségével azonban ennél bonyolultabb feladat megoldására is képes egy második osztályos. Az itt következő szöveges feladat segítségével fogom bemutatni, hogy a későbbiek folyamán hogyan alakul az egyenletmegoldáshoz szükséges eljárás algoritmusa.

Andris nagymamájának a háza körül szárnyasok (tyúkok, kakasok, libák és kacsák) és négylábú állatok (disznók, kutyák és macskák) élnek. Andris szobájának ablakán elromlott a redőny, így csak a rések között tud kikukucskálni. Az egyik résen kilesve azt látja, hogy az állatoknak 13 feje van. Egy másikon kinézve pedig azt, hogy az állatoknak 36 lába van. Mivel szemüvegét elfelejtette felvenni, nem látja rendesen, hogy melyik fej, melyik láb milyen állathoz tartozik. Nagymamájától az tudja, hogy egyetlen állatnak sem hiányzik lába. Segíts neki, hogy megtudja, hány szárnyas és hány négylábú van az udvarban!

A második osztályos

- *megfogalmazza a szövegben rejlő élőlényekhez köthető egyszerű viszonyokat, kapcsolatokat* (minden állatnak 1 feje van, a szárnyasoknak 2-2 lába, a négylábú állatoknak 4-4 lába van);
- érti a problémában szereplő adatok viszonyát *(az összes állat száma 13, az összes láb száma 36).*

A feladat megoldásához eszközt használ a másodikos, például korongokat és számolópálcikákat. Az eljárás során elővesz a fejek szimbolizálására 13 korongot, és a lábak megjelenítésére 36 pálcikát. A korongokat az asztalra kissé széthúzva teszi, majd minden koronghoz 2-2, azaz összesen 26 pálcát tesz. Ha minden pálca elfogyna, akkor a ház körül csak baromfik lennének. Ezután a maradék pálcákat kettesével szétosztja a már 2-2 pálcával rendelkező néhány korong között. Azok a korongok, ahol a pálcák elfogyása után 2 pálca van, jelenítik meg a szárnyasokat. Azok pedig, amelyekhez 4 pálca illeszkedik, ábrázolják a négylábú állatokat.

Ezzel a feladattal azt is megtanulhatja a gyermek, hogy egy egyenletnek nem mindig van megoldása, csak az adatokon kell egy kicsit változtatnunk.

Amennyiben a szövegben kevesebb láb szerepel, mit a fejek számának kétszerese – azaz lenne olyan korong, amihez kettőnél kevesebb pálca tartozik, pedig egy állatnak sem hiányzik lába –, ellentmondásra jutunk, a feladatnak nem lesz megoldása.

Amennyiben a szövegben több láb van, mint a fejek számának négyszerese – azaz még maradna pálcák az után, hogy minden korongnál 4-4 pálca van az asztalon – szintén ellentmondásra jutunk, a feladatnak ekkor sem lesz megoldása.

Akkor sem jutunk megoldáshoz, ha a lábak száma páratlan, azaz úgy marad egy pálca a kezünkben, hogy minden korongnál 2 vagy 4 pálca van az asztalon.

Ha a gyermek legalább egy ilyen jellegű feladatot tevékenységgel már megoldott (konkrét manipulatív szint (Bruner, 1968)), akkor harmadik, negyedik osztályban képes eszközök nélkül, rajzok segítségével (ikonikus szint, (Bruner, 1968)), számfeladattal megoldani a feladatot.

Harmadik-negyedik osztályban

A számfeladat logikai lépései a következők:
Fejek száma: 13
Ha minden állat szárnyas, akkor a lábak száma: 13·2=26
Mivel maradt még láb, van négylábú állat az udvarban.
A négylábúak „másik két” lába összesen: 36-26=10
Ha van még 10 lábunk, akkor a négylábúak száma: 10:2=5
*Látszik, hogy a számfeladat gondolatmenete megegyezik a tevékenység menetével***,** a gondolatmenetből itt is kiderül, hogy nem lesz megoldás, ha a lábak száma kevesebb, mint 26, vagy több, mint 52. Illetve akkor sem, ha a lábak száma páratlan.

Felső tagozaton

A felsőtagozat során természetesen szintén alkalmazható a korábban leírt bármelyik megoldás. Az új ismeretek és módszerek megismerésével azonban lehetősége nyílik más megoldási módra is. Harmadik és negyedik osztályban számos modellel ismerkednek meg a diákok, amelyeket a szöveges feladatokban lévő összefüggések megjelenítésére használhatnak. A modellek absztrakciós szintje különböző, hiszen a tevékenységből a vizuális, képi megjelenítésen (például szakaszos ábrázolás) keresztül jutunk el az absztraktabb modellek használatáig, ez a szimbolikus szint (Bruner, 1968). Az egyik jól ismert absztrakt modell a táblázat. Attól függően, hogy a táblázatban mely adatokat, illetve kapcsolatokat jelenítjük meg, két különböző út nyílik meg a feladat megoldására.

Az egyik esetben a fejek számáról szóló információt indirekt használjuk fel, így 3 oszlopunk lesz, amelybe konkrét adatokat írunk:

1. táblázat

A szövegben rejlő kapcsolatok megjelenítése konkrét tartalommal

szárnyasok száma	négylábúak száma	lábak száma
13	0	13·2=26
12	1	12·2+1·4=28
11	2	11·2+2·4=30
Stb.		

Az 1. táblázat konkrét értékekkel történő kitöltése során a következő figyelhető meg:

– nem lesz megoldás, ha a lábak száma kevesebb, mint a fejek számának kétszerese, azaz 26.
– Ha a szárnyasok száma eggyel csökken és a négylábúak száma eggyel nő, akkor a lábak száma pontosan kettővel növekszik.
– A fentiekből következik, hogy a táblázat minden sorában pontosan kettővel lesz több a lábak száma, mint az előzőben, így a lábak mennyisége sorról-sorra folyamatosan növekszik. Azaz csak egy megoldásunk lehet. Ha megtaláltuk ezt a megoldást, nem kell tovább vizsgálnunk az eseteket. *Fontos megjegyezni, ennek a leírása és indoklása nélkül a táblázat nem jelent teljes megoldást még akkor sem, ha minden sort leírtunk addig, amíg megkaptuk a 36-ot.*
– Nem lesz megoldásunk, ha a lábak száma több, mint a fejek számának négyszerese.
– Nem lesz megoldásunk, ha a lábak száma páratlan, mert minden állatnak páros sok lába van. És páros számok minden egész számú többszöröse páros.

A táblázat kitöltése során ugyanaz a folyamat zajlik le a háttérben, mint amikor a korongokhoz pálcákat tettünk. Annyi az eltérés, hogy nem vettünk ki előre a lábakat jelképező 36 pálcát, hanem az összes pálcából teszünk le lábakat a fent leírt módon, és közben számoljuk azokat, amíg el nem érjük a 36-ot.

A másik feldolgozásban az állatok fejei és lábai közötti kapcsolatot direkt módon jelenítjük meg, azonban a konkrét számadatok helyett általánosan írjuk fel az összefüggéseket. Ehhez azonban szükségünk lesz egy ismeretlen bevezetésére. Az ismeretlen lehet bármilyen szimbólum, aminek a felső tagozat után megszokott jelölése egy betű, általában az .

2. táblázat

A szövegben lévő összefüggések megjelenítése egy ismeretlennel, általánosan

	összesen	szárnyasok	négylábúak
fejek száma	13	x	13-x
lábak száma	36	x·2	(13-x)·4

A 2. táblázat kitöltésekor az és leírásánál ugyanaz a gondolat van a gyermek fejében, mint korábban: a fejek száma 13.

Míg az első táblázatban a 13 konkrét bontásait látjuk, a másodikban egy absztraktabb, általános bontással találkozunk. A lábak számánál ugyanez az absztrakciós lépés figyelhető meg.

Az egyetlen összefüggés, ami nem jelent meg a táblázatban, hogy összesen hány lába van az állatoknak. A kapcsolat felírásához egyenletet használunk.

$x \cdot 2+(13-x) \cdot 4=36$

Az egyenletmegoldás során alkalmazzuk a korábban felhalmozott tudásból:

- *a szorzás a kivonásra nézve disztributív, vagyis a zárójel felbontható.* Azaz, ha a 2 ismeretlenszereséhez hozzáadjuk a négy 13-nál -szel kevesebb többszörösét, az ugyanaz, mintha hozzáadnám a négy 13-szorosát, és elvenném az -szeresét.
- *azonos nemű kifejezések összevonhatók*
- *a monotonitást*, azaz, ha a mérleg egyensúlyban volt, és a mérleg két oldalára egyenlőket teszünk fel, vagy egyenlőket veszünk el, az egyensúlyi állapot megmarad.

Vagyis az első táblázat konkrét eseteinek felírása teszi lehetővé a második feldolgozáshoz szükséges, általános összefüggés megfigyelését és felírását.

Középiskolában

A matematika tanítása során elfogadottnak kellene lennie annak a ténynek, hogy egy feladatot bármilyen módon megoldhatunk, amennyiben a megoldás során alkalmazott összefüggések, eljárások megfelelőek. Így ezt a konkrét feladatot a középiskolában is megoldhatjuk számfeladatként, konkrét értékhármasok felírásával (*amennyiben tudjuk, hogy csak azért lehet ez teljes megoldás, mert pozitív egész számok körében keressük a megoldást, és indokoltuk, hogy minden lehetőséget megnéztünk*), és egyenlettel is. (Kivételt képez ez alól, ha a feladat szövegében szerepel a kötelezően használt eljárás megnevezése!)

A középiskolában megjelenik egy új tartalom, amely egy új eljárás megtanulását, kialakítását teszi lehetővé.

Ha az állatok fejének összegéről szóló információt is kihagyjuk a táblázatból, akkor két ismeretlen bevezetésére lesz szükség. (3. táblázat)

3. táblázat

A szövegben lévő összefüggések megjelenítése két ismeretlennel, általánosan

	összesen	**szárnyasok**	**négylábúak**
fejek száma	13	x	y
lábak száma	36	$x \cdot 2$	$y \cdot 4$

Amennyiben ezt az utat választjuk, két egyenlet, azaz egy egyenletrendszer lesz szükséges a kapcsolatok felírásához.
A fejek számára vonatkozó összefüggés: x+y=13
A lábak számára vonatkozó összefüggés: x·2+y·4=36
A megoldásra ismét van egy olyan eljárás, amely egy az egyben támaszkodik a korábban tanultakra.
Ebben az esetben az egyik ismeretlent kifejezzük az egyik egyenletből, majd a másikba behelyettesítjük. Ha a fejek számára vonatkozó összefüggésből fejezzük ki a négylábúak számát (y=13-x), és ezt helyettesítjük be a lábak számára vonatkozó összefüggésbe, akkor a felső tagozatban taglalt egyenlethez jutunk: x·2+(13-x)·4=36.

A másik eljárás az összeadás monotonitásán alapul, azaz, ha egyenlőkből egyenlőket veszünk el, vagy egyenlőket adunk hozzá, egyenlők maradnak.

Erre az eljárásra egyenlő együtthatók elveként szoktak hivatkozni. Ez az eljárás lesz a Gauss elimináció (avagy kiküszöbölés) alapja.

Ebben az esetben az egyik egyenletet megszorozzuk (vagy elosztjuk) egy számmal annak érdekében, hogy az egyik változóból mindkét egyenletben ugyanannyi legyen. Konkrétan a mi esetünkben, az eredeti összefüggések:
A fejek számára vonatkozó összefüggés: x+y=13.
A lábak számára vonatkozó összefüggés: ·2+y·4=36
Megfelelő megoldást ad, ha az első összefüggést megszorozzuk kettővel, akkor az így kapott egyenletet kivonjuk a második egyenletből. A kapott egyenlet ismeretlenje ebben az esetben az lesz. Majd megoldjuk az így kapott egyismeretlenes egyenletet. Ennek a megoldásnak az a szépsége, hogy ugyanazokat a műveleteket hajtjuk végre, mint az eszközökkel végzett következtetéskor.

Úgy is eljárhatunk, hogy az első összefüggést szorozzuk most 4-gyel, majd az így kapott egyenletből vonjuk ki a második egyenletet. Ismét egyismeretlenes egyenletet kapunk. Ennek az egyenletnek az ismeretlenje azonban az *x* lesz. Ez az egyenlet meg fog egyezni a kifejezem-behelyettesítem megoldási út valamelyik lépésben kapott alakjával.

Harmadik lehetőség is létezik a lábak számára felírt egyenletet oszthatjuk kettővel, majd az így kapott egyenletből vonjuk ki az első egyenletet. Ismét egyismeretlenes egyenletet kapunk, amelynek az ismeretlenje az *y* lesz.

Bármelyik eljárást is választjuk, a feladat befejezéséhez vissza kell helyettesítenünk a kapott értéket valamelyik eredeti összefüggésbe, és kiszámolni a még ismeretlen másik értéket.

Konklúzió

A bemutatott példákon is láthattuk, hogy a hosszú út módszerével a tanuló nem mindig érzi úgy, hogy új dolgot tanul. Matematikai kompetenciái úgy fejlődnek, hogy a *megnevezés, elemzés, megállapítások*, az összehasonlítás, megkülönböztetés magasabb szintre kerül, és ezáltal fejlődnek a megszületett fogalmak. A fogalmak *megalkotásához szükséges tevékenységek során használt eljárásokat* egyre jobban általánosítja, amellyel *algoritmusokat alkot.* A kialakult algoritmusokat különböző környezetben módosításokkal megfelelően használja. Fontos jellemzője ennek a módszernek, hogy az első lépések után már képes a gyermek „egyenleteket megoldani", mivel út közben is használja az aktuális szinten elsajátított fogalmat probléma megoldásra.

Bár a gyermek gyakran hamar letenné az eszközt, a pedagógus feladata, hogy olyan probléma helyzeteket alakítson ki, amelyben újra és újra elő kell venni az eszközöket. Ezzel megtanítva a gyermeknek azt, ha zavar támad egy probléma megoldása során, akkor érdemes visszalépni arra az absztrakciós szintre, ahol utoljára biztonsággal mozgott.

Befejezés

A mindennapi életben és az iskolában számos más szituáció is alkalmas lenne a hosszú út módszerének bemutatására. Ebben a dolgozatban azért választottam ezt a két példát, mert mindenki találkozik a két témával, és nagyon alkalmas annak bemutatására, hogy ugyan az a gondolat, szó, művelet mennyire mást-mást jelent az út különböző szakaszaiban az óvodától a középiskoláig. Ha a hosszú útnak bármelyik szakasza kimarad, a rá épülő fogalomalkotási szint megalapozatlan, bizonytalan marad. Éppen ezért a pedagógusnak az oktatás során alkalmazott módszerek megválasztásakor nem a ritka kivételekhez kell igazodnia, hanem tanulás pszichológiailag megalapozott módszereket kell alkalmaznia.

Irodalom

Bruner, J . S. (1968) *Az oktatás folyamata.* Tankönyvkiadó.

C. Neményi E. (2002) Az alsó tagozatos matematika tantárgy helyzete és fejlesztési feladatai. *Új Pedagógiai Szemle*, *52*(12), 89–98. http://epa.oszk.hu/00000/00035/00066/2002-12-hkNemenyi-Also.html

C. Neményi, E. (2018). Nem szóból - hanem cselekvésből! Érintő *Elektronikus Matematikai Lapok*, (10). http://www.ematlap.hu/index.php/tanora-szakkor-2018-12/800-nem-szobol-hanem-cselekvesbol

C. Neményi, E. & Sz. Oravecz, M. (1993). *Útjelző az 1. osztályos matematika tanításához .* Nemzeti Tankönyvkiadó.

C. Neményi, E., Sz. Oravecz, M. (1994). *Útjelző a 2. osztályos matematika tanításához.* Nemzeti Tankönyvkiadó.

C. Neményi, E., Wéber, A., Konrád, Á. & Móricz, M. (2021–2023) *Építsük fel! I.-IV. Matematikai gyűjtemény és Matematika munkáltató feladatlapok*. Oktatási Hivatal.

C. Neményi, E., Oravecz, M. & Móricz, M. (2021), *Építsük fel! Matematika munkáltató feladatlapok 2. osztály*. Oktatási Hivatal.

Deák, E. (1985). *Tanári kézikönyv a Matematika I. Kiegészítő tankönyvhöz.* Tankönyvkiadó.

Deák, E. (1991). *Matematika I.-III. Kiegészítő tankönyv.* Tankönyvkiadó.

Kiss, T. (2001). *A matematikai gondolkodás fejlesztése hétéves korig.* Nemzeti Tankönyvkiadó.

Piaget, J. & Inhelder, B. (2004) *Gyermeklélektan*,.Osiris Kiadó.

Piaget, J. (1999). *Szimbólumképzés a gyermekkorban.* Kairosz könyvkiadó Kft.

Rimat, F. (1925). *Intelligenzuntersuchungen anschliessend an die Ach'sche Suchmethode. 4. köt.* Göttingen Akadem. Buchh. G. Calvör Nachf .

Vásárhelyi, É. (2006). *Problem solving with help of combination of different representations*. In M, Fothe, M., Hermann & B., Zimmermann (Eds .), *Learning in Europe: Computer in Mathematics Instruction* (pp. 68–87). Collegium Europaeum Jenense.

Vigotszkij, L. Sz. (2000). *Gondolkodás és beszéd.* Trezor Kiadó.

Szabályozó dokumentumok

Nemzeti alaptanterv (NAT) 5/2020. (I. 31.) Kormányrendelet. Magyar Közlöny 2020. évi 17. szám 290-446. o.

Kerettanterv 2020 NAT-hoz 5.-8. évfolyamok részére: https://www.oktatas.hu/kozneveles/kerettantervek/2020_nat/kerettanterv_alt_isk_5_8

Kerettanterv 2020 NAT-hoz 9.-12. évfolyamok részére: https://www.oktatas.hu/kozneveles/kerettantervek/2020_nat/kerettanterv_gimn_9_12_evf

Matematikai kompetenciaterület (2008). „A" 2. évfolyam, Kompetenciafejlesztő oktatási program kerettanterv .Educatio Kht.

Matematikai kompetenciaterület (2008). „A", Matematika 3. évfolyam, Kompetenciafejlesztő oktatási program kerettanterv. Educatio Kht.

Pintér, M.

The long way a mathematical concepts and methods develop

In Hungary, mathematics teaching is structured in a spiral manner, with individual mathematical contents recur repeatedly in the course of public education. During the twelve (in some cases thirteen) academic years, the range of concepts related to a given content is expanded, the concepts become more and more precise, and the degree of freedom of the definition matching the given level of abstraction is developed. With the expansion of the scope and depth of the concepts, the range of techniques employed also broadens. However, if the content is not treated as a process, not as one stage on a long journey, then the spiral will not help the construction of mathematical concepts, the rudimentary concepts will remain separate and isolated. In this article, I show samples of the long journey through specific mathematical content.

Keywords: Mathematics teaching, mathematical thinking, long journey, pre-kindergarten age, preschool age, primary school, secondary school, gaining experience, developing concepts based on actions and deeds

Pintér Marianna: https://orcid.org/0000-0002-3820-694X