Gyermeknevelés Tudományos Folyóirat, 2025, *13*(2), 309–326.
https://doi.org/10.31074/gyntf.2025.2.309.326

Tematikus tanulmány

A matematikai gondolkodás fejlesztése számelméleti feladatokkal

Szeibert Janka[1] – *Szabó Csaba*[2] – *Vas Vivien*[3] – *Zámbó Csilla*[4]

Absztrakt:

A számelmélet a matematika olyan területe, ahol a legkülönbözőbb ötletekkel, legváltozatosabb feladattípusokkal találkozunk: az egyszerű órai feladatoktól az olimpiai versenyfeladatokig. Kutatásunkban egy olyan kísérletet dolgoztunk ki, amely a számelmélettel való ismerkedést, számelméleti feladatok megoldását összeköti az általános matematikai problémamegoldó képességgel. A kísérletben nyolcadik osztályos tanulók vettek részt. A kísérleti csoport diákjai minden óra elején egy számelmélettel kapcsolatos feladatot oldottak meg, a kontrollcsoport tagjai a reguláris tananyaggal kapcsolatosan kaptak feladatot. A kísérlet eredményességét a reguláris tananyaggal kapcsolatos dolgozatokkal, valamint olyan szintfelmérőkkel vizsgáltuk, melyekben a számelmélet témaköre nem szerepelt.

Kulcsszavak:

számelmélet, matematikai gondolkodás, problémamegoldás

Bevezetés

„A matematika a tudományok királynője, és a matematika királynője a számelmélet." (G. F. Gauss)

A magyarországi matematikaoktatás kiemelt célja a diákok problémamegoldó képességének fejlesztése (NAT, 2020). Ennek hagyományai erősek: Magyarországon több olyan tudós is foglalkozott a problémamegoldó képesség fejlesztésével, akinek módszere világhírű lett (ld. Hersch & John-Steiner, 1993; Schoenfeld, 2017). A problémamegoldásra úgy is tekinthetünk, mint eszközre, amely által fejlődhet az általános matematikai gondolkodásunk.

[1] HUN-REN Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet; Edutus Egyetem; szeibert.janka@tok.elte.hu;

[2] MTA-ELTE Matematika Tanuláselméleti Kutatócsoport; Edutus Egyetem; szabo.csaba.mathdid@ttk.elte.hu;

[3] ELTE Gyertyánffy István Gyakorló Általános Iskola; vas.vivien@gyertyanffy.elte.hu

[4] ELTE Eötvös Loránd Tudományegyetem Tanító- és Óvóképző Kar Matematika Tanszék; zambo.csilla@tok.elte.hu

Az emberi gondolkodás fejlődésének mértéke, a problémamegoldó képesség fejlődéséhez hasonlóan számos tényezőtől függ, például a kívülről jövő segítség minőségétől és fajtájától (Wood, Bruner & Ross 1976; Baeten, Dochy & Struyven, 2008), vagy hogy milyen típusú feladatokkal találkozunk. A középiskolai matematika tananyag nagyon sok területet ölel fel, így a tanárok változatos feladatokat készíthetnek és szabadon választhatnak a feladatok közül. Mégis, a tanítási folyamat során sokszor csak egy témakör van terítéken egyszerre, és a problémamegoldás során nincs lehetőség változatos feladatokkal fejleszteni a diákok képességeit. Emellett a középiskolai tananyagban a számelmélet témaköre kis súllyal szerepel, pedig a számelmélet a matematika olyan területe, ahol a legkülönbözőbb ötletekkel, legváltozatosabb feladattípusokkal találkozhatunk: az egyszerű órai gyakorlófeladatoktól az olimpiai versenyfeladatokig.

Ezért kezdtük el vizsgálni, hogyan hathatnak a számelmélettel kapcsolatos feladatok a közoktatásban tanuló diákok gondolkodásának fejlődésére, általános matematikai gondolkodására. Olyan kísérletet terveztünk, amely a számelmélettel való ismerkedést, számelméleti feladatok megoldását összeköti az általános matematikai problémamegoldó képességgel. A kísérletben nyolcadik osztályos tanulók vettek részt, akiket két részre osztottuk, egy kísérleti és egy kontrollcsoportra. A kísérleti csoport diákjai minden óra elején egy számelmélettel kapcsolatos feladatot oldottak meg, a másik csoport tagjai a reguláris tananyaggal kapcsolatosan kaptak feladatot. A kísérlet eredményességét a reguláris tananyaggal kapcsolatos dolgozatokkal és olyan szintfelmérőkkel vizsgáltuk, melyekben a számelmélet témaköre nem szerepelt.

A számelmélet tanításának helyzete a magyar közoktatásban

A számelmélet témaköre az egész általános iskolát végigkíséri (Oktatási Hivatal, 2020a,2020b). A magyar diákok már alsó tagozatban találkoznak a páros és páratlan számok, többszörös, osztó és a maradék fogalmával. Felső tagozat 5. osztályában már törtek összeadásával, kivonásával, egyszerűsítésével és bővítésével is megismerkednek. Törtek összeadásánál és kivonásánál célszerű a legkisebb közös nevezőt megtalálni, melyhez szükséges a legkisebb közös többszörös meghatározásának ismerete. A törtek egyszerűsítéséhez kapcsolódóan pedig a legnagyobb közös osztó fogalma kerülhet bevezetésre.

Felső tagozat 7. és 8. évfolyamában kibővítik az eddig tanult oszthatósági szabályokat. Megtanulják (vagy átismétlik) a prímtényezős felbontás eljárását és azt, hogy hogyan találják meg néhány szám legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét a prímtényezők, illetve azok nemnegatív egész hatványkitevőinek segítségével. Ezekkel párhuzamosan, az általános iskola végén segítenünk kell a bizonyítás igényének kialakulását, hogy a későbbiekben a tanulók képesek legyenek sejtések alapján tételeket és definíciókat alkalmazni problémamegoldás során és a korosztályuknak megfelelő feladatok megoldását magyarázattal együtt megadni. A tanulók ebben a korosztályban már képesek (megfelelően előkészített) absztrakt fogalmak elsajátítására (vö. McLeod, 2019), és ha Bruner spiralitás-elve (Bruner, 1960) szerint építjük föl az iskolai tananyagot, akkor már érettek lesznek a tapasztalatok általános megfogalmazására is.

Láthattuk, hogy általános iskolában szinte folyamatosan foglalkozunk a számelmélet témakörével, középiskolában azonban a kerettanterv szerint a 11. évfolyam néhány órájától eltekintve szinte semmit (Oktatási Hivatal, 2020c). A szaktanár dönthet úgy, hogy 12. osztályban az érettségi előtt röviden átismétli ezt a témakört, de ez is csak néhány plusz tanórát jelent. Ennek az lehet az oka, hogy mind a közép- , mind az emelt szintű érettségin kevés számelmélettel kapcsolatos feladat van, és ezek nagy része az általános iskolai ismeretekkel megoldható. Elmondhatjuk tehát, hogy a számelmélet témakörét elhanyagolják a középiskolai matematikaoktatás során (Csányi, Fábián, Szabó & Szabó, 2015; Csányi, Fábián & Szabó, 2016). Ennek ellenére kevés olyan matematikaversennyel találkozunk, ahol ne fordulna elő számelméleti feladat. Ennek az lehet az oka, hogy a számelmélet a matematikának olyan területe, ahol a legkülönbözőbb ötletekkel, legváltozatosabb feladattípusokkal találkozunk az egyszerű órai feladatoktól az olimpiai versenyfeladatokig. Emiatt ez a témakör alkalmassá válhat a diákok problémamegoldó képességének fejlesztésére is.

Problémamegoldás

„A matematikai kompetencia a matematikai gondolkodás fejlesztésének és alkalmazásának, az elvonatkoztatásnak és a logikus következtetésnek a képessége. Az arra való készséget is jelenti, hogy a mindennapi problémák megoldása során matematikai ismereteket és módszereket alkalmazzunk. A matematikai kompetencia képessé tesz arra, hogy felismerjük az alapvető matematikai elveket és törvényszerűségeket a természetben. Elősegíti a problémák megoldását a mindennapokban, otthon és a munkahelyen. Alkalmassá tesz az érvek láncolatának követésére, a matematika nyelvén megfogalmazott törvények megértésére." (Nemzeti alaptanterv, 2012)

Kutatásunkban a Nemzeti alaptanterv (NAT, 2020) kulcskompetenciái közül a problémamegoldást emeljük ki. A magyarországi matematikaoktatás problémaközpontú, nagy hangsúlyt fektetünk a problémafelismerés és a problémamegoldás kompetenciáinak fejlesztésére.

Magyarországon számos tankönyv, feladatgyűjtemény és versenyfeladatgyűjtemény áll rendelkezésünkre, melyek segítségével rendszeresen adhatunk problémákkal kapcsolatos feladatokat diákjainknak. Ennek ellenére az egyetemre érkező diákok problémamegoldó képessége a kritériumdolgozatok és az órákon mutatott teljesítményük alapján megítélve gyakran nem elég fejlett. Így egyetemre érkezésükkor hátrányba kerülnek, hisz nem rendelkeznek a feladatmegoldáshoz szükséges kompetenciákkal. Ezen kompetenciák fejlesztése érdekében hoztuk létre kísérletünket. Az volt a hipotézisünk, hogy a számelmélet-feladatoknak köszönhetően a diákok eredményei a matematika több területén is javulnak.

A kísérlet leírása

A kísérlet szempontjai

Egy kísérlet eredményességéhez több szempontot figyelembe kell vennünk, hogy az eredmény értékelhető legyen. Elronthatja az értékelhetőséget például, ha a diákok motiválatlanok, ha nincs kontrollcsoport, ha más szaktanár tanít az egyes csoportokban, ha különböző iskolákat hasonlítunk össze egymással, vagy ha különböző képességű diákokat hasonlítunk össze egymással.

A kísérlet minél hosszabb távon való hatását szerettük volna vizsgálni, ezért a feladatsor összeállításánál fontos szempont volt, hogy legalább három hónapra elegendő feladatból álljon. A koncepciónk az volt, hogy 15–20 versenyfeladat adja a feladatsor gerincét. Ezek kiválasztása után a nehézségüktől függően rávezető feladatokat készítettünk, a könnyebben megoldható versenyfeladatokhoz 1 vagy 2, a nehezebben megoldhatókhoz 3 vagy 4 darabot. Az azonos témakörbe tartozó feladatokat nehézség szerint sorrendben egymás után helyeztük el, így a feladatsoron belül blokkok alakultak ki. Ezeket a blokkokat azonos típusú feladatokkal választottuk el egymástól. Így összesen 63 feladatunk lett. A feladatokat 7–10. osztályos tanulóknak egyaránt ajánljuk. Az alábbiakban egy fővárosi iskola 8. osztályában végzett kísérlet eredményeit mutatjuk be részletesen.

A módszer hatékonyságát, azaz a diákok fejlődésének mértékét úgy próbáltuk meg felmérni, hogy az ne függjön a képességbeli különbségektől és a tárgyat tanító tanártól sem. Azaz úgy kellett kísérleti és kontrollcsoportot választanunk, hogy ne legyen nagy tudás- és képességbeli különbség a két csoport között. Az iskolában adja magát az ülésrend szerinti kettéosztás: minden osztályban a padsor egyik fele a kísérleti, a padsor másik fele a kontrollcsoportba került. Így a tárgyat tanító tanártól sem függ az eredmény, hiszen adott osztályon belül van egy kísérleti és egy kontrollcsoportunk azonos tanárral.

Fontos szempont volt annak a kiküszöbölése, hogy a diákok motiválatlansága esetlegesen torzítsa az eredményeket. Magyarországon a közoktatásban tanuló diákoknak általában nem jelent elég motivációt a tudás elsajátítása, ezért motivációként jó osztályzatok megszerzése mellett döntöttünk. Azért, hogy aktivitásukat fentartsuk, négy részre osztottuk a feladatokat, és minden rész teljesítése után ötöst szerezhetett az a diák, aki elérte az általunk megállapított pontszámot. Ez általában az összpontszám 50%-át jelentette, hiszen az volt a célunk, hogy a diákok minél motiváltabbak legyenek.

Fontos, hogy a diákok ne tudják, miről szól a kísérlet, ezért a kontrollcsoportban lévők is kaptak feladatokat. Azalatt az idő alatt, amíg a kísérleti csoport számelmélet feladatokat oldott meg, a kontrollcsoportnak tananyaggal kapcsolatos feladatokat kellett megoldania. Azaz a kontrollcsoport diákjait minden órán tesztelték az aktuális tananyagból. Az előhívási hatásról ismert, hogy nagy mértékben segíti a reguláris tananyag elsajátítását (Dunlosky et al., 2013), tehát a kontrollcsoportot biztosan fejlesztettük az alatt az idő alatt, amíg a kísérleti csoport diákjai számelmélettel foglalkoztak. Összességében a kontrollcsoport diákjai heti 20–25 perccel többet foglalkoztak a reguláris tananyaggal, mint a kísérleti csoport diákjai. Az, hogy valamilyen tevékenységet végezzen a másik csoport is, pszichológiai szempontból reálisabbá teszi a kísérletet, mert a résztvevők így nem tudják, melyik csoportnak kellene jobban fejlődnie, csak azt tudja mindenki, hogy szerepel a kísérletben. A kísérlet felépítése garantálta, hogy az óra eleji feladatmegoldás idején kívül a kísérleti és a kontrollcsoport biztosan azonos tanulási folyamatban vegyen részt, ne legyen véletlenül sem különbség aközött, ahogyan tanítja őket a tanáruk. Így a kísérletben tényleg azt mértük fel, amit szerettünk volna.

A feladatok koncepciója

Azt szerettük volna, hogy a diákok eljussanak arra a szintre, hogy korosztályuknak megfelelő (számelméleti) versenyfeladatokat meg tudjanak oldani. A diákok általában erre nem képesek. Ennek az az oka, hogy a kerettantervben feltüntetett teljes alapóraszám négyötöd része az új ismeretek elsajátítására fordítódik. A fennmaradó órák felhasználásáról a szaktanár dönthet, fordíthatja őket ismétlésre, gyakorlásra, felzárkóztatásra, tehetséggondozásra vagy számonkérésre. Általában az órák nagy részére szükség van az ismétléshez, gyakorláshoz, felzárkóztatáshoz, számonkéréshez, sőt a legtöbb esetben ezekre is kevés a rendelkezésre álló idő. Ennek eredményeképp a tehetséggondozás szorul háttérbe, ami miatt a diákok többsége nem, vagy csak alig találkozik versenyfeladatokkal általános- és középiskolai tanulmányai során.

A számelmélettel kapcsolatos feladatokat különböző versenyekből válogattuk össze 7–8. évfolyamos diákok számára. Az összes feladatunk olyan volt, hogy a tanulók már alapszintű tudással és minimális logikai készséggel megértették volna a feladat jó megoldását, de még nem volt olyan problémamegoldási rutinjuk vagy gondolati képességük, hogy ezeket maguktól meg tudják oldani, ezért kellettek a rávezető feladatok. Figyeltünk arra, hogy ezek önmagukban is gondolkodtatóak legyenek.

Lentebb látunk egy mintát arra, hogyan néz ki egy blokk a feladatsorban (35–43. feladat). Néhány feladatnál a megoldást is feltüntettük. Észrevehetjük, hogy vannak olyan feladatok, amelyek azonos vagy közel azonos sémára épülnek. Ez azért volt fontos, hogy ha valaki egyszer elrontott egy feladattípust, esetleg nem tudta megoldani, akkor a megoldás megtekintése után még legyen esélye a gyakorlatban is alkalmazni a szükséges gondolatot, technikát. Emellett cél volt ezzel a gyakoroltatás is, az ötlet rögzítése a memóriában. Nem vártuk el a diákoktól, hogy ha egyszer láttak egy ötletet, akkor azt rögtön stabilan tudják, inkább többször megmutattuk nekik, különböző feladatokban.

Ez a blokk jól mutatja, hogyan épülnek egymásra a rávezető feladatok, hogyan jutunk el a blokk végi versenyfeladatig. Az 5, a 2 és a 3 különböző kitevőjű hatványainak végződését kérdezik a feladatok. Miután a tanulók ezeket megoldották vagy megnézték a megoldásokat, újra hasonló feladatokat kaptak, de már magasabb kitevőre. Időközben néhány hatványazonosság és az összetett szám fogalma is frissítésre kerül, illetve a végződés (oszthatóság) tagonkénti vizsgálata – mint ötlet – is megjelenik. Az utolsó feladat megoldásához az előző ötletek mindegyikét kellett használni.

35. Milyen számjegyre végződik 5^{2019}? Segítség: Írd fel 5 hatványait, és nézd meg milyen számjegyre végződnek. Észreveszel valamit?

Megoldás:
Az 5 bármely hatványa 5-re végződik, tehát 5^{2019} is 5-re végződik.

36. Milyen számjegyre végződik 2^{22}? Segítség: Írd fel 2 hatványait, és nézd meg, milyen számjegyre végződnek. Észreveszel valamit?

Megoldás:

2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

Észrevesszük, hogy 2, 4, 8, 6 végződéseket kapunk, melyek periodikusan ismétlődnek. Mivel $22 = 4 \cdot 5 + 2 \rightarrow$ Tehát ötször ismétlődik a 2, 4, 8, 6 végződés, majd leírunk még két számot, a 2-t és a 4-et.. Tehát 2^{22} végződése ugyanaz, mint 2^2 végződése, vagyis 4.

37. Milyen számjegyre végződik 3^{19}? Segítség: Írd fel 3 hatványait, és nézd meg milyen számjegyre végződnek. Észreveszel valamit?

38. Melyik a nagyobb? 2^{300} vagy 3^{200}?

Megoldás:
$2^{300} = (2^3)^{100} = 8^{100}$ **;** $3^{200}=(3^2)^{100} = 9^{100} \rightarrow$ Tehát 3^{200} nagyobb, mint 2^{300}.

39. Melyik a nagyobb? $2^{85} \cdot 5^{85}$ vagy 3^{170}?

40. Milyen számjegyre végződik 2^{9999}? Segítség: Írd fel 2 hatványait, és nézd meg milyen számjegyre végződnek. Észreveszel valamit?

41. Milyen számjegyre végződik 3^{1993}? Segítség: Írd fel 3 hatványait, és nézd meg milyen számjegyre végződnek. Észreveszel valamit?

Észrevesszük, hogy 3, 9, 7, 1 végződéseket kapunk, melyek periodikusan ismétlődnek. Mivel $1993 = 4 \cdot 498 + 1 \rightarrow$ Tehát 498-szor ismétlődik a

3, 9, 7, 1 végződés, majd leírunk még egy számot. Tehát 3^{1993} végződése ugyanaz, mint 3^1 végződése, vagyis 3.

42. Igazold, hogy $3^{202} + 5 \cdot 3^{210} + 1$ összetett szám! (Segítség: Nézd az öttel való maradékot.)

Megoldás:
$5 \cdot 3^{210}$ biztosan osztható 5-tel, tehát elég belátnunk, hogy $3^{202} + 1$ is osztható 5-tel. 3^{202} végződése ugyanaz, mint 3^2 végződése, vagyis 9, amihez 1-et adva 10-et kapunk. → Tehát $3^{202}+1$ is osztható 5-tel. Így az összeg is osztható 5-tel, tehát összetett szám.

43. Milyen számjegyre végződik $2^{101} + 3^{101} + 5^{101}$? (Segítség: Vizsgáld a tagokat külön-külön!)

Megoldás:
Ehhez meg kell néznünk a tagokat külön-külön, hogy milyen számjegyekre végződnek.

A 2 hatványait felírva látjuk, hogy a 2, 4, 8, 6 végződések ismétlődnek periodikusan. Nézzük: $2^{101} \rightarrow 101 = 4 \cdot 25 + 1 \rightarrow$ Ez azt jelenti, hogy a négy leírt szám 25-ször ismétlődik, majd leírunk még egyet. Tehát 2^{101} utolsó számjegye ugyanaz, mint $2^1 = 2$.

A 3 hatványait felírva látjuk, hogy a 3, 9, 7, 1 végződések ismétlődnek periodikusan. Nézzük $3^{101} \rightarrow 101 = 4 \cdot 25 + 1 \rightarrow$ Ez azt jelenti, hogy a négy leírt szám 25-ször ismétlődik, majd leírunk még egyet. Tehát 3^{101} utolsó számjegye ugyanaz, mint $3^1 = 3$.

Az 5 hatványait felírva látjuk, hogy minden 5 hatvány 5-re végződik, tehát 5^{101} utolsó számjegye 5. A $2^{101} + 3^{101} + 5^{101}$ utolsó számjegye $2 + 3 + 5 = 10$, tehát 0-ra végződik.

A fenti lánc összeállításakor fontos szempont volt, hogy ne legyen túl direkt a rávezetés, de mindegyik „kisebb feladathoz” kelljen egy új gondolat vagy alkalmazni kelljen egy korábban látott gondolatot más környezetben, majd végül a „nagy feladat” megoldásához minden ötletet fel kelljen használni. A megoldások leírásmódjával is közvetítjük: nem elég csupán a végeredmény. Ez javítja a diákok kommunikációs készségét, és látják, hogyan is néz ki a részletes, precíz megoldás.

A feladatokat 4 részre osztottuk, és a fentebb említett koncepció alapján blokkokra osztottuk. Az azonos blokkba tartozó feladatok azonos típusúak. Azt szerettük volna, ha a diákok tudják, mikor érkeznek egy blokk végére, emiatt a különböző blokkok között azonos típusú, szintén számelméleti feladatokat helyeztünk el. Ilyen például a következő feladat:

51. Melyik a nagyobb? $(-0,99)^{100}$ vagy $3^4 \cdot 4^4 \cdot 5^4 / 60^4$?

Megoldás:
A (-0,99) kitevője páros, tehát pozitív lesz a szám. A 0,99 kisebb, mint 1, ezért a 100. hatványa is kisebb, mint 1. A jobb oldalon szereplő tört nevezőjét felbontva: → A tört számlálója és nevezője egyenlő, tehát a tört értéke 1. → A jobb oldali szám a nagyobb.

Pontozás, javítás

Annak érdekében, hogy a diákok valóban részt vegyenek a kísérletben, fontos volt a megfelelő motiváció biztosítása. A magyar diákoknál a korábbi tapasztalatink alapján általában az a legjobb motiváció, ha ezért szerezhetnek valami plusz jegyet, pontot vagy lehetőséget. Olyan rendszert igyekeztünk kidolgozni, amely segít, hogy minden diák a kísérlet teljes időtartama alatt motivált maradjon: azok is, akiknek az elején nem sikerül olyan jól teljesíteni, és azok is, akiknek jól megy. Ezt úgy oldottuk meg, hogy a diákok az egyes feladatok megoldására nem érdemjegyet, hanem pontokat kaptak. A feladatokat négy részre osztottuk, és az összegyűlt pontokat minden rész végén összeadtuk. Azok a diákok, akik az adott rész végén elérték a megfelelő pontszámot, jelest kaptak. Ez általában a pontok 50%-át jelentette. Így azoknak a diákoknak is volt esélyük a jó osztályzat elérésére a későbbi blokkok során, akik az elején rosszul teljesítettek, akik pedig végig jól szerepeltek, több ötöst szerezhettek.

A kísérletünk egyik célja az volt, hogy a diákoknak minél gazdagabb ötlettára legyen, ezért a számelméleti feladatok javításánál a pontok nagy része a jó ötletek megjelenéséért járt, nem a megoldásért. Ezzel azt közvetítettük a diákok felé, hogy áldozzanak energiát a részletes leírásra, és legyen világos számukra, hogy a matematikában sokszor fontosabb az ötlet, a gondolatmenet, mint a végeredmény. Ezt a diákokkal az első feladat előtt közöltük, és közben is elhangzott, hogy nem elég a végeredményt leírni. Az összes dolgozatot ugyanaz a személy javította, így az egységes értékelés is garantált volt. A javítási útmutató a kísérlet kezdete előtt elkészült, ezért a feladatok javítása nem igényelt sok időt. A diákok számára elérhető volt egy táblázat, melyben az addig elért pontjaikat tudták ellenőrizni.

A kontrollcsoport az aktuális tananyaghoz kapcsolódó tankönyvi feladatot kapott. Az adott órán írt számelmélet feladatra adható maximális pontszám megegyezett a tankönyvi feladatra adható maximális pontszámmal. A reguláris tananyaghoz kapcsolódó feladatok magyarázatát meg lehetett beszélni közvetlen a feladat megoldása után (amennyiben erre szükség volt), hiszen ez az aktuális tananyaghoz kapcsolódott. Ahhoz, hogy a fejlődés mértékét fel tudjuk mérni, a számelmélet feladatok megbeszélése nem történhetett meg a tanórán. Ez nehézséget okozott, de megtaláltuk a megoldást. A kísérleti csoport minden feladatához tartozott egy kód, amit a feladat megoldása után kaptak meg az órát tartó pedagógustól. A kód ismeretében egy, a csoportot tanító tanárnő által gondozott honlapot megnyitva a diákok ellenőrizhették a helyes végeredményt és megnézhették az ehhez vezető gondolatmenetet is. Így akár óra végén le tudták ellenőrizni, jól gondolkodtak-e, ezzel azonnali visszajelzést kaptak a diákok a munkájukról, és mivel a pontjaikat is meg tudták nézni, az is látható volt, hogy mennyi pontra van még szükségük az ötös megszerzéséhez. Azt tapasztaltuk, hogy a diákok lelkesek voltak és érdeklődők, óra után rögtön elővették a telefonjukat, hogy megnézzék az adott feladat helyes megoldását.

Kísérlet a gyakorlatban

Röviden összefoglaljuk a kísérlet alakulását és az egyes blokkok utáni tapasztalatokat. Úgy alakítottuk ki a kísérletet, hogy ne vegyen el sok időt az órából. A szaktanár az aktuális feladattal, kóddal, és a kontroll csoport számára kiválasztott feladattal érkezett a terembe. A jelentés után a hetesek kiosztották a számelmélet feladatokat a megfelelő diákoknak, a tanár pedig felírta a kontroll csoport tagjai által elvégzendő feladat számát a táblára. Pár perc gondolkodás után, mikor a tanulók kész voltak a feladatokkal, a tanár mindkét csoport munkáját beszedte, majd felírta a táblára az aznapi kódot. Így a kísérlettel kapcsolatos feladatok 5–10 percet vettek el az adott tanórából.

Első rész

Az első 15 feladatban a prímtényezős felbontás, legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös, oszthatóság fogalma, osztási maradékokkal való számolás, skatulyaelv alkalmazása és kombinatorikával kapcsolatos feladatok szerepeltek.

A feladatok javításakor az első néhány feladatra általában minimális pontot kaptak a diákok. Ennek oka egyrészt az volt, hogy csak a végeredményt írták le, másrészt azoknál a feladatoknál, ahol több megoldás is volt, eggyel is megelégedtek. A diákokat érdekelte a megoldás, amit közvetlen az óra után meg is néztek. A honlapon elérhető megoldások érthetőek és kellően részletesek voltak, így utólagos magyarázatot és korrigálást nem igényeltek. Többször említették azok a diákok, akik számelmélettel kapcsolatos feladatot kaptak, hogy jobban szeretnék a másik csoport feladatát írni, hiszen az sokkal könnyebb. Nekik el kellett magyarázni, hogy ez egy kísérlet, aminek a megfelelő működése érdekében már nem lehet megváltoztatni a csoportok felosztását.

Második rész

A második rész témakörei között az oszthatóság fogalma, oszthatósági szabályok, indirekt bizonyítás, hatványozás azonosságai, számok tízes számrendszerbeli alakjának értelmezése szerepeltek.

A diákok fejlődése már ennél a résznél érzékelhető volt, akár matematikai gondolkodásukat, akár érvelési és kommunikációs készségeiket tekintjük. A diákok munkáiban a feladatok megoldásánál legtöbbször már nem pusztán a végeredmény szerepelt (mint ahogyan korábban jellemző volt), hanem a megoldáshoz tartozó ötletek.

A második rész utolsó feladatánál az osztály egy külön feladatot is kapott. A feladat megoldása mellé kellett írniuk, mennyire találják nehéznek a feladatokat, és melyik típusú feladatot választanák, ha az ő döntésük lenne. A feladatok nehézségére 10-es skálát használtunk, ahol 1 volt a nagyon könnyű és 10 a nagyon nehéz. Azok a diákok, akik a reguláris tananyaggal kapcsolatos feladatokat oldották meg, általánosságban 4–5 nehézségűre, akik számelmélet feladatokat írtak, 8–9 nehézségűre értékelték a feladatokat. A kísérleti csoport 10 diákja közül 9 magától is a számelmélet feladattal folytatta volna, és a kontrollcsoport 9 diákja közül 6 inkább a számelmélet feladatot írta volna. A kísérleti csoport diákjainak válaszai megnyugtatóak voltak, hiszen az első résznél még a legtöbben cseréltek volna a másik csoport tagjaival. A kontrollcsoportban lévő diákoknak megígértük, a kísérlet után ők is kapnak számelmélettel kapcsolatos feladatokat.

Harmadik rész

A 31–45. feladatok témakörei: adott szám többszöröseinek fogalma, oszthatósági szabályok alkalmazása, oszthatósági maradékokkal való számolás, hatványozás azonosságai, számok tízes számrendszerbeli alakja, összetett szám fogalma, prímhatványok végződései, periodikusság fogalma.

Ennél a résznél azt éreztük, elértük a diákoknál azt, hogy gondolkodjanak és precízen megadják egy adott feladat megoldását. Válaszaikban majdnem mindig leírták a feladathoz kapcsolódó elméletet (akár kérte a feladat, akár nem), a gondolatmenetüket érvekkel alátámasztva, és végül a végeredményt, választ. Azt vettük észre, hogy a diákoknak tetszenek ezek a feladatok, főleg most, hogy már sikerélményük is van.

Negyedik rész

Az utolsó részt próbáltuk úgy összeállítani, hogy minden eddigi téma megjelenjen ezekben a feladatokban. Ez azért volt, hogy lássuk, a feladatok megoldása mennyire mélyült el. Ezen kívül új téma is szerepelt: prímszámok fogalma, tíz feletti prímszámok végződései, prímszámok paritásából adódó tulajdonságok.

Ebben a részben az eddig gyengébben teljesítő diákoknál is tapasztalható volt a fejlődés. A diákok elmondták mennyire tetszettek nekik ezek a feladatok. Tudják, hogy a kísérletnek vége, de szeretnék, ha ehhez hasonló feladatok írását továbbra is folytatnánk.

Eredmények

A diákok húsz héten keresztül oldották meg a kísérlettel kapcsolatos feladatokat. A kísérlet alatt összesen négy dolgozatot írtak. A kísérlet elején felmértük a kísérleti és a kontrollcsoportok diákjainak előzetes tudását és megvizsgáltuk, hogy eltérő matematikai képességekkel rendelkezik-e a két csoport. Így a kísérleti és a kontrollcsoportoknak nem csak az eredményeit, hanem fejlődésük mértékét is fel tudtuk mérni. Ehhez összegyűjtöttük a diákok tanév elején írt első témazáró dolgozatainak eredményeit (Bemeneti mérés). Ezt akkor írták, amikor az osztályok felosztása kísérleti és kontrollcsoportra már megtörtént, de a számelmélet feladatsort még nem kezdték el megoldani. A dolgozat témaköre algebra volt.

A második dolgozatot (Függvények 1.) a kísérlet 15. hetében írták a függvények témaköréből. A harmadik dolgozatot (Szintfelmérő) az utolsó számelmélet feladat beadása után egy héttel írták meg. Ebben olyan témájú feladatokat válogattunk össze, melyeket ebben a tanévben tanultak, de nem kapcsolódik a számelmélet témaköréhez. A negyedik dolgozatot (Függvények 2.) az utolsó számelmélet feladat beadása után 3–4 héttel írták a függvények témaköréből. Azért választottuk a függvényeket, mert olyan témából szerettük volna felmérni a diákok tudását, amit 2–3 hónappal korábban tanultak, tehát valószínűleg még emlékeznek rá, de azóta már új téma is feldolgozásra került. Így a tudásuk hosszabb távú hatását (is) vizsgáltuk.

Az év elején írt első dolgozatra (Bemeneti mérés) maximálisan 40 pontot szerezhettek a diákok. A dolgozat eredményeit az 1. táblázatban láthatjuk.

1. táblázat

A „Bemeneti mérés”-en elért pontszámok

Kísérleti csoport	Kontrollcsoport
40	40
40	40
40	40
39	39
39	37
39	36
38	34
37	34
36	30
33	
Átlag: 38,1	Átlag: 36,67

A két csoport ezen eredménye nem különbözik szignifikánsan, tehát a két csoport egyformának tekinthető. A kísérlet egy limitációja a kis elemszám, ami miatt a következő néhány bekezdés inkább a korábban tárgyalt kvalitatív jelenségek számokkal is megmutatható alátámasztásának, tovább elemzésének tekintendő, mint önálló kvantitatív elemzésnek.

A kísérlet 15. hetében a függvények témából írtak témazáró dolgozatot (Függvények 1.), ahol maximálisan 31 pontot szerezhettek. Ezeket az eredményeket a 2. táblázatban láthatjuk.

2. táblázat

A „Függvények 1." dolgozaton elért pontszámok.

Kísérleti csoport	Kontrollcsoport
31	31
31	31
30	30
29	29
29	28
29	27
28	25
28	21
28	21
27	
Átlag: 29,0	Átlag: 27,0
Szórás: 1,333	Szórás: 3,905

Az utolsó számelmélet feladat megoldása után egy héttel megírták a harmadik dolgozatot (Szintfelmérő). Ez a dolgozat reguláris tananyaggal kapcsolatos feladatokat tartalmazott, melyen legfeljebb 24 pontot lehetett szerezni. Az eredményeket a 3. táblázatban láthatjuk.

3. táblázat

A „Szintfelmérő" dolgozaton elért pontszámok

Kísérleti csoport	Kontrollcsoport
24	24
24	24
24	24
24	21
23	20
21	19
21	16
20	14
17	9
14	
Átlag: 21,2	Átlag: 19,0
Szórás: 3,425	Szórás: 5,172

Az utolsó számelmélet feladat megoldása után négy héttel megírták a negyedik dolgozatot is (Függvények 2.). Ezen a dolgozaton legfeljebb 35 pontot lehetett szerezni. Az eredményeket a 4. táblázatban láthatjuk.

4. táblázat

A „Függvények 2." dolgozaton elért pontszámok.

Kísérleti csoport	Kontrollcsoport
35	35
35	35
33	35
32	28
30	27
30	25
30	23
29	22
28	11
24	
Átlag: 30,6	Átlag: 26,8
Szórás: 3,34	Szórás: 7,85

Adattisztítás

Az osztályból öt diák legtöbbször maximális pontot ért el az év közben írt dolgozatokon. Az öt diák közül három a kontrollcsoportba, kettő a kísérleti csoportba tartozik. Őket az eredmények értékelése során kihagytuk, ugyanis korábbi kísérleteink tapasztalatai alapján a legszorgalmasabb és legtehetségesebb tanulóknál nem számít mit és hogyan tanítunk, tudni fogják a tananyagot. Újra kiszámoltuk az átlagokat, az így kapott eredményeket a következő táblázatokban láthatjuk.

5. táblázat

A „Függvények 1." dolgozaton elért pontszámok (öt diák nélkül)

Kísérleti csoport	Kontrollcsoport
31	29
30	28
29	27
29	25
28	21
28	21
28	
27	
Átlag: 28,75	Átlag: 25,167
Szórás: 1,282	Szórás: 3,488

6. táblázat

A „Szintfelmérő" dolgozaton elért pontszámok (öt diák nélkül)

Kísérleti csoport	Kontrollcsoport
24	24
24	20
24	19
24	16
23	14
21	9
20	
17	
Átlag: 22,13	Átlag: 17,0
Szórás: 2,588	Szórás: 5,215

A negyedik dolgozat (Függvények 2.) összesen négy feladatot tartalmazott, melyből kettő átlagos nehézségű volt (1. és 3.), kettő nehezebb, több gondolkodást igényelt (2. és 4.). Az itt elért eredményeket feladatonként részletezzük, hogy a két különböző nehézségű feladattípus esetén mutatott teljesítmények láthatóvá váljanak. A könnyebb áttekinthetőség érdekében a kísérleti csoport eredményeit szürke háttérrel emeltük ki, a kontroll csoport eredményeit fehér háttérrel látjuk.

7. táblázat

Függvények 2. (öt diák nélkül)

	1.	1.	2.	2.	3.	3.	4.	4.	Összesen	Összesen
Max. pont	**10**	**10**	**11**	**8**	**8**	**8**	**6**	**6**	**35**	**35**
	10	10	11	6	8	8	6	6	33	28
	10	10	10	6	8	8	6	4	32	27
	10	10	9	5	8	8	6	3	30	25
	10	10	8	3	8	8	6	2	30	23
	10	9	6	3	7	7	6	0	30	22
	10	9	5	1	7	0	5	0	29	11
	9		5		7		5		28	
	8		3		5		4		24	
Átlag:	**9,625**	**9,67**	**7,125**	**4,0**	**7,25**	**6,5**	**5,5**	**2,5**	**29,5**	**22,67**
Szórás:	**0,744**	**0,516**	**2,8**	**2,0**	**1,035**	**3,209**	**0,756**	**2,345**	**2,726**	**6,154**

A kísérleti csoportokban tanuló diákok szignifikánsan több pontot szereztek, mint a kontrollcsoportokban lévők, annak ellenére, hogy az év eleji dolgozaton hasonlóan teljesített a két csoport. A 7. táblázatban az is látható, hogy azokon a feladatokon, melyek több gondolkodást igényeltek (2. és 4.) még nagyobb a differencia a kísérleti csoport és a kontroll csoport diákjai között. Azt is elmondhatjuk, hogy egy diák kivételével a kísérleti csoport minden tagja legalább annyi pontot ért el, mint a kontroll csoport legjobban teljesítő diákja.

Azt gondolhatnánk, hogy azoknak a diákoknak, akik a reguláris tananyagot többet gyakorolták, jobban kellene teljesíteniük az ebben a témában írt dolgozatokon. Az 5., 6. és 7. táblázatokban rögzített eredmények igazolják, hogy azok a diákok, akik több hónapon keresztül számelmélet feladatokkal foglalkoztak, jobban teljesítenek a reguláris tananyagból is. Megállapíthatjuk, hogy módszerünk közép- és hosszútávon hatékony volt. A kiváló diákokon, akik a hagyományos módon rendszeresen és jól tanulnak, nem tudtuk érdemben felmérni a kísérlet hatását. Ők a kísérlet nélkül is majdnem mindig maximálisan teljesítenek. Ez nem jelenti sem azt, hogy ők nem fejlődtek, sem azt, hogy a kísérletünk hatása pótolható a hagyományos tanulással. Az ő fejlődésüket egy külön kísérletben lehetne vizsgálni.

További tapasztalatok

A fent részletezett kísérlettel párhuzamosan ugyanazon fővárosi iskola 7. osztályában és egy agglomerációbeli kisvárosban található általános iskola 7. és 8. osztályában is zajlott kísérlet. Tanulmányi eredmények és a diákok képességei tekintetében a fővárosi iskola erősnek, a kisvárosi iskola átlagosnak mondható. A kísérlet minden osztályban a fentivel megegyező módon volt megtervezve és indult el: Egy-egy adott osztályt ülésrend alapján bontottunk kísérleti és kontrollcsoportra. Ezek esetén az osztályok esetén nem csak a diákok, de még az őket tanító tanár sem tudta, melyik csoporttól várunk több fejlődést, így biztosan kiküszöböltük annak a lehetséges hatását, hogy elfogult legyen valaki vagy az elvárások befolyásolják az eredményt. Felmértük a kísérleti és a kontrollcsoportok diákjainak előzetes tudását a tanév elején írt dolgozatok eredményei alapján vizsgáltuk, melynek témája minden csoport esetén algebra volt. A tanulók az óra első 5–10 percében foglalkoztak számelmélet-feladat megoldásával (kísérleti csoport) vagy az aktuálisan tanult anyaghoz kapcsolódó feladattal (kontrollcsoport). A tanároknak igyekeztünk minél több segítséget nyújtani mind előkészített anyagokkal, mind folyamatok kommunikáció útján, hogy egyrészt a lehető legkevesebb plusz terhelést jelentse számukra a kísérlet, másrészt érezzék a támogatásunkat és tudjanak kérdezni, ha bármilyen kétely merül fel a teendőkkel kapcsolatban. Sajnos a koronavírus-járvány kitörése és a veszélyhelyzeti online oktatás miatt elveszett a kapcsolat ezekkel a csoportokkal az utólagos felmérők kitöltése előtt, így csak az óra elején megoldott feladatok és a feladatokkal kapcsolatos tapasztalatok érkeztek be tőlük.

A tendenciák és tapasztalatok megegyeztek a fent leírtakkal, egy csoportot kivéve. Az ő esetükben a szaktanár jobbnak látta megváltoztatni a kísérlet kivitelezési módját, az előzetes precíz kommunikáció ellenére. Onnantól kezdve ez az osztály nem egy feladatot, hanem öt-hat feladatot írt egy órán. Próbáltuk a kialakult helyzetet a kísérlet javára fordítani, és úgy gondoltuk, a kísérlet végén levonhatjuk a következtetést, érdemes-e egyesével íratni a feladatokat. A 3. rész feladatai esetén érzékelhető volt a különbség a kísérleti elrendezést pontosan megvalósító osztályokhoz képest: tapasztaltunk fejlődést, és szerepelt a feladatok megoldásának magyarázata is, de nem volt olyan precízen és logikusan megfogalmazva, mint a többi osztályban. A 4. rész esetén nem tapasztaltunk olyan fejlődést, mint a többi osztálynál. Így elmondható, hogy ez a „tömbösített” változata a módszernek kevésbé hatékony, mint amikor minden óra elejére egy feladat jut.

Külön örömteli volt, hogy a kísérlet végén minden csoportban arról adtak visszajelzést a diákok, hogy tetszettek nekik a feladatok, és bár tudják, hogy vége a kísérletnek, szívesen oldanának meg hasonló feladatokat a jövőben.

Összegzés

Kutatásunkban azt vizsgáltuk, hogy fejleszthető-e a diákok matematikai problémamegoldó képessége számelméleti feladatok megoldásán keresztül. A vizsgálat egy oktatási kísérlet keretében zajlott, egy nyolcadikos osztályt osztottunk fel kísérleti és kontrollcsoportra ülésrend alapján. Mindkét csoportnak egy-egy feladatot kellett megoldania a tanórák elején: a kontrollcsoport tagjai az aktuális tananyaghoz kapcsolódó feladattal foglalkoztak, míg a kísérleti csoport tagjai egy számelméleti feladattal az általunk összeállított feladatsorból. A módszer hatékony volt, a kísérlet csoport jobban teljesített a reguláris tananyaghoz kapcsolódó problémákból utóteszten, mint a kontrollcsoport.

Irodalom

Baeten, M., Dochy, F. & Struyven K. (2008). Students' approaches to learning and assessment preferences in a portfolio-based learning environment. *Instructional Science*, *36,* 359–374. https://doi.org/10.1007/s11251-008-9060-y

Bruner, J. S. (1960). *The process of education*. Harvard University Press. https://doi.org/10.4159/9780674028999

Csányi, P., Fábián, K., Szabó, Cs. & Szabó, Zs. (2015). Number theory vs Hungarian highschool textbooks: The fundamental theorem of arithmetic, *Teaching Mathematics and Computer Science, 13*(2), 219–223. https://doi.org/10.5485/TMCS.2015.0397

Csányi, P., Fábián, K. & Szabó, Zs. (2016). *Hogyan építsünk számelméletet?* TDK-dolgozat.

Dunlosky, J., Rawson, K. A., Marsh, E. J., Nathan, M. J. & Willingham, D. T. (2013). Improving Students' Learning With Effective Learning Techniques: Promising Directions From Cognitive and Educational Psychology. *Psychological Science in the Public Interest*, *14*(1), 4–58. https://doi.org/10.1177/1529100612453266

Hersh, R. & John-Steiner, V. (1993). A visit to Hungarian mathematics. *The Mathematical Intelligencer*, *15*(2) 13-26. https://doi.org/10.1007/BF03024187

McLeod, S. A. (2019). Bruner – learning theory in education. *Simply Psychology*. February 1, 2024. https://www.simplypsychology.org/bruner.html

Nemzeti alaptanterv (2012). https://ofi.oh.gov.hu/sites/default/files/attachments/mk_ nat_20121.pdf

Nemzeti alaptanterv (2020). https://magyarkozlony.hu/dokumentumok/3288b6548a740b9c8daf918a399a0bed1985db0f/letoltes (pp. 41, 42, 44)

Oktatási Hivatal (2020a). *Kerettanterv 1–4. osztály.* https://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/kozoktatas/kerettanterv/Matematika_A.docx

Oktatási Hivatal (2020b). *Kerettanterv 5–8. osztály*. https://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/kozoktatas/kerettanterv/Matematika_F.docx

Oktatási Hivatal (2020c). *Kerettanterv 9–12. osztály*. https://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/kozoktatas/kerettanterv/Matematika_K.docx

Schoenfeld, A. (2017). Thoughts on Pólya, Problem Solving and Where They Can Lead You. In Stein, M. (Ed.), *A Life's Time for Mathematics Education and Problem Solving* (pp. 370–377). WTM-Verlag. https://doi.org/10.37626/GA9783959870641.0.28

Vas, V. (2020). *Számelméleti gondolkodás lehetőségei a matematikai szemlélet fejlesztésében*. Szakdolgozat. ELTE TÓK.

Wood, D.J., Bruner, J. S. & Ross, G. (1976). The role of tutoring in problem solving. *Journal of Child Psychiatry and Psychology*, *17*(2), 89–100. https://doi.org/10.1111/j.1469-7610.1976.tb00381.x

Developing mathematical thinking with exercises in number theory

Number theory is an area of mathematics where we find the most diverse
Number theory is an area of mathematics where we find the most diverse
ideas and the most varied types of problems – from simple classroom problems to those at Olympic competition level. We designed an experiment that links the learning of number theory and solving number theory problems with general mathematical problem-solving skills. The participants in the experiment were Grade 8 students. The students in the experimental group were given a number theory task at the beginning of each lesson, while the students in the control group were given a task related to the regular curriculum. The effectiveness of the experiment was tested by regular curriculum assessments and by assessments in which number theory was not involved.

Keywords:

number theory, mathematical thinking, problem solving