Gyermeknevelés Tudományos Folyóirat, 2025, *13*(1), 5–19.
https://doi.org/10.31074/gyntf.2025.1.5.19

Tanulmány

Esszenciális ábrák szerepe egy fejlesztő kísérlet keretein belül

Turzó-Sovák Nikolett[1] – *Csíkos Csaba*[2]

Absztrakt:

Tanulmányunkban egy fejlesztő kísérlet eredményeiről számolunk be, ami egy, a budai agglomerációban található általános iskola 3. évfolyamán zajlott. Kutatásunk központjában az esszenciális (Berends & Van Lieshout, 2009) ábrákat tartalmazó szöveges matematikai feladatok megoldásának segítése állt. Kísérletünk célja az volt, a tanulók 12 saját fejlesztésű feladatpár feldolgozása során találkozzanak egy-egy esszenciális ábrával, melynek tanulmányozása nélkülözhetetlen a sikeres feladatmegoldáshoz. Eredményül azt vártuk, hogy a kísérletben részt vett tanulók körében magasabb lesz a megoldottsága az ilyen típusú szöveges matematikai feladatoknak, és hogy nő a realisztikus válaszok aránya a realisztikus (Verschaffel, 2009) szöveges feladatok megoldása során. A kísérlet eredményeként tendenciózusan nőtt a kísérleti csoportban a realisztikus szöveges feladatokra adott realisztikus válaszok aránya, és kimutatható fejlesztő hatást értünk el egy PISA 2003-as hiányos szövegezésű feladat megoldottságában. Eredményeink a matematikadidaktika, a problémamegoldás területén fontos adalékul szolgálhatnak a gyakorló pedagógusok és a matematika módszertani képzés számára.

Kulcsszavak:

esszenciális ábrák, fejlesztő kísérlet, szöveges feladatok, problémamegoldás, alsó tagozat

Elméleti áttekintés

A matematikai szöveges feladatok szerepe az oktatásban

Az elmúlt évtizedekben a hazai és nemzetközi kutatók kiemelkedő érdeklődést mutattak a matematika tanulása, különösen a problémamegoldó képesség iránt (Csíkos et al., 2011; Hidayatullah & Csíkos, 2023). A matematikai gondolkodásnak három aspektusa van: problémamegoldás, metakogníció és

[1] ELTE Eötvös Loránd Tudományegyetem Tanító- és Óvóképző Kar, MTA–SZE Metakogníció Kutatócsoport; sovak.nikolett@tok.elte.hu;

[2] Szegedi Tudományegyetem, Neveléstudományi Intézet, MTA-SZE Metakogníció Kutatócsoport; csikoscs@edpsy.u-szeged.hu;

affektus (Viitala, 2015). A szöveges feladatokban található komplex problémahelyzetek lefedik az előbb említett három tényezőt. A szöveges feladatok a matematikai problémamegoldás egyik komplex fejlesztő eszköze (Verschaffel & De Corte, 1997). A hazai és nemzetközi kutatások több aspektusból vizsgálták azok hasznosságát, helyét az oktatásban. A matematikai szöveges feladatok megoldása során fejlődik a tanulók számolási és problémamegoldó készsége. Emellett a megoldási folyamat alatt új fogalmakkal is találkozhatnak. Ezek mellett lehetőséget teremtenek, hogy felkészítsék a tanulókat olyan, a mindennapi életben vett helyzetre, ahol használniuk kell az iskolában tanultakat (Dewolf et al., 2013), és lehetőséget teremtenek arra, hogy a matematikai ismereteiket valós kontextusban gyakorolják (De Corte et al., 2000). A szöveges feladatok már az iskolai matematikai oktatás korai szakaszában jelen vannak. A szöveges feladatok azonban témakörönként jelennek meg a matematikaoktatásban, a tanult téma és a matematikai eljárások gyakoroltatásaként (Kelemen, 2006).

A szöveges matematikai feladatok egyik csoportja, az ún. realisztikus szöveges feladatok. A realisztikus szöveges feladatok esetében a megoldásukhoz a világról való előzetes ismereteinket és tudásunkat is fel kell használnunk (Verschaffel et al., 1994). Veschaffel és munkatársai 1994-ben publikált, tíz párból álló feladatsora a realisztikus matematikai feladatok megoldottságát vizsgálták, a szokatlan problémákra adott realisztikus válaszok alapján (Kelemen, 2004). A felmérés magyar adaptációját Csíkos Csaba (2003) valósította meg. Vizsgálata azt az eredményt mutatta, hogy a diákok a feladat megoldásához megfelelő műveletet választanak, azonban válaszadáskor nem veszik figyelembe annak reális alapjait.

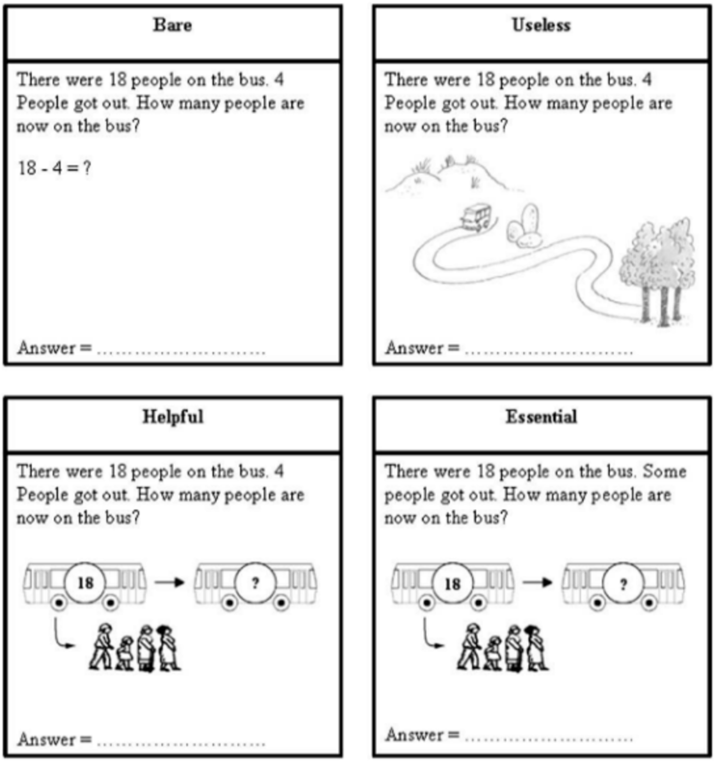
A vizuális reprezentációk szerepe a szöveges feladatokban

Számos korábbi kutatás vizsgálta a szöveges matematikai feladatokat kísérő ábrák szerepét a tanulók feladatmegoldás során (vö. Cummins, 1991; Hegarty & Kozhevnikov, 1999; Elia & Philippou, 2004). Több kutatás azt erősíti meg, hogy az olvasott matematikai problémák vizuális ábrázolása segíti a tanulókat annak megoldásában (Schnotz, 2002). A matematikai problémamegoldásban fontos az olvasott matematikai fogalmakat, relációkat ábrázoló ábrák generálására való képesség (Csíkos et al., 2012). Ezt árnyalva, több kutatás rámutatott arra, hogy a feladat szövegében szereplő adatok ismétlését tartalmazó ábrák nem feltétlenül segítik a tanulót a megoldásban (például Berends & Van Lieshout, 2009). A túl szemléletes, részletekre kiterjedő ábrák pedig elvonhatják a tanulók figyelmét a matematikai problémáról (McNeil et al., 2009).

A szöveges feladatokat kísérő ábrák több szempontból kategorizálhatók. Az egyik, tanulmányunkhoz szorosan kapcsolódó terminust Berends és Van Lieshout (2009) alkotta meg. Ahogy az *1. ábra* mutatja, a tipizálás négy kategóriába sorolja a szöveges feladatokat kísérő ábrákat. Az első kategóriát a *sivár/csupasz* (bare) típusú rajzok alkotják, melyeknek semmilyen funkciójuk nincs a feladat megoldásának sikerességének szempontjából. A második kategóriába a *haszontalan* (useless) típusú ábrák kerültek, melyek semmilyen olyan adatot, információt nem tartalmaznak, ami kapcsolódik a feladat szövegéhez, így nem segítik annak megértését. A harmadik csoport a *segítő* (helpful) ábrákat öleli fel: ezek olyan vizuális ábrák, amelyek segítik a tanulót a szövegben megfogalmazott probléma megoldásában. Ezek az illusztrációk tovább terhelik a tanulók memóriáját a feladatmegoldás során (Mayer et al., 2012), hiszen össze kell egyeztetni a képen látott információt a szövegben olvasottakkal. A negyedik csoportba az *esszenciális* (essential) típusú rajzok tartoznak, melyek olyan matematikai szöveges feladat megoldását segítik, melyen szövegezése hiányos és a megoldáshoz szükséges információt a képről kell megszerezni. Ezen feladatok megoldása jóval nagyobb problémát jelent a tanulóknak, mint a teljes szövegezésű feladatok (Berends & Van Lieshout, 2009).

1. ábra

A vizuális ábrák fajtái
(Forrás: Berends & van Lieshout, 2009, p. 347)



Korábbi kutatásunkban (Turzó-Sovák et al., 2025) egy 2003-ban megjelent PISA matematikai feladat gyenge megoldási eredményének okát vizsgáltuk. A szöveges feladat mellett egy esszenciális típusú ábra volt látható, melynek vizsgálata elengedhetetlen volt a sikeres feladatmegoldáshoz. Az eredmények azt mutatják, hogy a tanulók rendelkeznek minden, a feladat sikeres megoldásához szükséges készséggel, ismerettel. A megoldottság mégis alacsony, mintegy 45% és 56%-os megoldottságot mutatott 5. és 6. évfolyamon.

Fejlesztő kísérletek módszertani kérdései

A kutatók számára a fejlesztő kísérletek egyik leginkább kiemelkedő sajátossága az, hogy iskolai környezetben valósulnak meg, részei lesznek az gyerekek iskolai, tanórai gyakorlatának. Ezzel együtt az egyik legnagyobb kihívása a fejlesztő kísérleteknek, hogy valóban olyan problémával foglalkozzanak, melyek gyakorlati módon tudnak beilleszkedni az osztálytermi környezetbe, az iskolai életbe és tevékenységbe (Csapó, 2003). A kísérlet sikeressége szempontjából fontos olyan eszközöket választanunk, melyek beleillenek az oktatási folyamat mindennapi gyakorlatába (Kelemen, 2007). Számos, a matematikai problémamegoldást segítő fejlesztő kísérlet valósult meg az elmúlt évtizedekben. A témával foglalkozó fejlesztő kísérleteket legkorábban az iskola 3. évfolyamában lehet megvalósítani, hiszen a szöveges feladat megoldása *„megfelelő szintű olvasási készség meglétét feltételezi”* (Csíkos, 2008, p. 110)

2. Módszer

Kutatási kérdések

Korábbi kutatások rámutattak arra, hogy milyen szerepet töltenek be a különböző típusú vizuális elemek a matematikai szöveges feladatok megoldása során (vö. Csíkos et al., 2010). Az eddig megjelent publikációk még nem foglalkoztak az esszenciális rajzok felhasználása fejlesztő kísérletben való módszertani lehetőségeivel. Kutatásunkban a következő kérdésekre kerestük a választ. (1) Mutatkozik-e változás a hagyományos szöveges feladatok megoldásának sikerességében a fejlesztő kísérlet hatására? (2) A fejlesztő kísérlet hatására változott-e a realisztikus válaszok aránya a realisztikus szöveges feladatok esetén? (3) A fejlesztő kísérlet hatására nőtt-e az esszenciális rajzot tartalmazó szöveges matematikai feladatok megoldottságának aránya?

Minta

Kutatásunkhoz kényelmi típusú mintavételi eljárást választottunk. A kutatásban három intézmény 3. évfolyamos tanulói vettek részt. A kontrollcsoportot két budapesti iskola tanulói alkották. A kísérleti csoportban egy, a budai agglomerációban található intézmény 3. évfolyamos tanulói vettek részt.

A mintanagyság 169 tanuló volt, amiből 86 gyermek a kísérleti csoportban, 83 pedig a kontrollcsoportban vett részt.

Mérőeszközök

Kutatásunk során a PPC (*pretest-posttest-control*) elrendezést követtük, vagyis a kísérleti és kontrollcsoportban ugyanazt a bemeneti és kimeneti tesztet oldották meg a tanulók. A mérések során három mérőeszközt alkalmaztunk. A tesztek rögzítése papír alapon, három időpontban valósult meg. Az első mérés 2024 márciusában történt az iskolákban, ahol egy 47 itemes általános matematikai készségvizsgáló tesztet használtunk. A mérőeszköz a 3. osztályos matematikai ismeretanyag fő elemeit tartalmazta. (1) műveleti fogalmak, úgy mint összeg, különbség, valahányszoros, valahányad (2) helyiértékek azonosítása 1000-es számkörben (3) alapműveletek, mint összeadás, kivonás, szorzás, (4) nyitott mondatok megoldása (5) szabályosság felismerése, számsorban, és annak folytatása (6) kombinatorika. A teszt reliabilitásmutatója a teljes mintán (Cronbach α) 0.701.

A második mérés, a fejlesztési időszak lezárultával, 2024 májusában történt, ahol a kontroll- és a kísérleti csoport két tesztet töltött ki.

Az egyik mérőeszköz négy hagyományos, teljes szövegezésű szöveges matematikai feladatot tartalmazott, amelyek mellett nem szerepelt semmilyen ábra. A feladatok között volt egy lépéssel és két lépéssel megoldható; egyszerű és fordított szövegezésű szöveges matematikai feladat. Megoldásukhoz összeadás, kivonás és szorzás műveleteket kellett használnia a tanulóknak.

A másik mérőeszközünk öt realisztikus szöveges matematikai és változatlan formában egy PISA 2003-as matematikai feladatot tartalmazott. A realisztikus szöveges feladatok alapjául Verschaffel és munkatársai (1994) által alkalmazott 20 feladata szolgált. Ezeket a feladatokat Csíkos (2004) fordította le és adaptálta egy hazánkban megvalósult kutatáshoz, melyből ötöt választottuk ki. A feladatok kiválasztásának fő szempontja az volt, hogy a feladatsorban szerepeljen mind a négy alapművelet.

A feladatok szövegei a következők voltak:

1. Karcsinak 5 barátja van, Gyurinak pedig 6. Karcsi és Gyuri úgy döntöttek, hogy együtt rendeznek egy bulit. Meghívták valamennyi barátjukat, akik mind el is jöttek. Hány barát volt ott a partin?
2. Jancsi legjobb eredménye a 100 méteres futásban 17 másodperc. Mennyi idő alatt fog ő lefutni 1 kilométert?
3. Ha egy tartályba beleöntünk 1 liter 80°C-os és 1 liter 40 °C-os vizet, milyen hőmérsékletű vizet kapunk?
4. 450 katonát kell buszokkal a gyakorlótérre szállítani. Egy katonai busz 36 katonát tud szállítani. Hány buszra van szükség?
5. Bálint és Aliz ugyanabba iskolába járnak. Bálint 17 kilométerre lakik az iskolától, Aliz pedig 8 kilométerre. Hány kilométerre lakik egymástól Bálint és Aliz?

A feladatok pontozása Verschaffel és társai (1994) által megadott pontozási útmutatója szerint történt, amit korábbi hazai kutatás követett már (Csíkos 2003). Ezek alapján a válaszokat két aspektus szerint vizsgáltuk. A fókuszban az állt, hogy az elvégzett műveletben és indoklásban megjelenik-e valamilyen realisztikus válasz, problémamegoldás. Az eredmények kódolásakor minden feladat két értéket kapott. Az első változóban, ahol a számolást vizsgáltuk, öt kategóriát alkalmaztunk:

EA: a feladat szövegéből matematikai művelettel kapott várt válasz
TE: a feladat szövegéből adódó matematikai művelet, de technikai hibával
RA: realisztikus válasz
NA: nincs válasz, vagy azt írta a tanuló, nem tudja
OA: egyéb válasz, rossz művelet, vagy a feladat szövegéből kiírt számok stb.

A második változó kialakításakor az indoklás részhez írt válaszban kerestünk realisztikus magyarázatot. Itt dichotóm változót alkottunk.

A 2003-as PISA matematikai tesztben szereplő dobókockás feladat változatlan formában került felhasználásra: egy hiányos szövegezésű feladat kiegészítve egy esszenciális rajzzal (Berends & Van Lieshout, 2009), amely hat dobókockát ábrázol. A szöveg a következő volt: *A fényképen hat dobókocka látható a-tól f-ig jelölve. A következő állítás minden egyes dobókockára érvényes: A kocka bármely két egymással szemben elhelyezkedő lapján lévő pöttyök összege mindig hét.* A tanulóknak egy hat négyzetből álló táblázatba kellett beírniuk a helyes megoldást, amik a fotón szereplő dobókockákhoz hasonló módon, a-tól f-ig voltak jelölve. A feladat megoldottsága a 2003-as PISA-mérések során az OECD országokban 58%, Magyarországon mindösszesze 35% volt (OECD, 2004). A későbbi, 5. és 6. évfolyamon végzett kutatásunk eredményei az OECD országok eredményeit közelítik meg, összességében 50%-os megoldottságot mutattak (Turzó-Sovák et al., 2025).

A fejlesztő eszköz

A csoportban részt vevő tanulók és pedagógusok egy saját fejlesztésű, 12 matematikai szöveges feladatpárt tartalmazó munkafüzetet kaptak. A munkafüzetben a feladatpárokat úgy alakítottuk ki, hogy az egyik feladatban egy hiányos szövegezésű matematikai feladat megoldásához egy esszenciális rajz társult, míg a másik teljes szövegezésű volt, és amellett egy segítő típusú rajz volt látható (*lásd 2. ábra*). A feladatpárokról elmondható, hogy azonos művelettel, azonos számkörben kellett megoldani.

2. ábra

Fejlesztő feladatlap

1. feladat

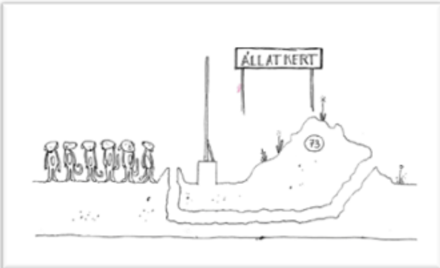
A szurikáták családokban élnek. Egy, a Szurikáta Parkban élő nagy család 44 tagból áll. Ebből 9 szurikáta még kölyökkorban van.

Hány felnőtt szurikáta él a Parkban?

2. feladat

A szurikáták nagyon jól tudnak járatokat ásni a földbe. Az állatkertben 73 szurikáta lakik. Néhány szurikáta átásott a kerítés alatt és sikerült megszöknie.

Hány szurikáta van most az állatkertben?



A feladatpárok összeállítása során egyszerű és fordított szövegezésű szöveges feladatokat is elhelyeztünk a munkafüzetben. A feladatok megoldásához összeadás, kivonás, szorzás és osztás műveletekre volt szükség. A munkafüzetben szerepelt olyan szöveges feladat, amely egyszerű alapművelettel és olyan szöveges feladat, amely több alapművelettel volt megoldható.

Adatfelvétel

Matematikaitudásszint-mérés

A kutatás első adatfelvétele során a kísérleti és a kontrollcsoport tanulói a matematikai készségeket mérő tesztet töltötték ki, papíralapon. Az adatfelvétel tantermi környezetben történt, egy matematikaóra keretein belül. Az adatfelvételnél az osztályt tanító pedagógus volt jelen.

Fejlesztő kísérlet

A fejlesztő program a kontrollcsoportban matematikaóra keretein belül zajlott. A pedagógusok és a tanulók kaptak egy-egy munkafüzetet, amely 12 pár szöveges feladatot tartalmazott. A kísérlet megkezdése előtt a pedagógusoknak egy rövid, szóbeli tájékoztatást adtunk arról, hogy a munkafüzetben található feladatpárokat egy-egy matematikaórán kell megoldani. Arra kértük őket, hogy a szöveges feladatokat az osztályukban már kialakított szokásrend és algoritmus alapján oldják meg a gyerekekkel. A feladatpárok elvégzése után pedig beszéljék meg a tanulókkal, mi volt a különbség a két szöveges feladat között, ezzel tudatosítva a gyerekekben azt, hogy az egyik esetben a képről kellett információt szerezni a feladat sikeres megoldásához, míg a másik feladat szövegében megtalálható volt az összes, a megoldáshoz szükséges adat. A fejlesztés 12 tanórán át zajlott az osztályokban.

Kimeneti hagyományos és realisztikus szöveges feladatok

A kimeneti teszteket a közvetlenül a fejlesztő kísérlet lezárulta után írták meg a tanulók. A realisztikus feladatokat tartalmazó mérőlap és a hagyományos szöveges feladatokat tartalmazó mérőeszköz kitöltésére egy-egy tanóra állt a tanulók rendelkezésére. A mérések során a gyerekek osztálytanítója volt jelen. Mivel a realisztikus feladatokat tartalmazó mérőeszköz nem hagyományos formában jelent meg a feladatlapon, ezért a pedagógusoknak útmutatót mellékeltünk a kitöltés menetéről. Az útmutatóban pontos leírás volt találhatók arról, hogy mit mondjanak a gyerekeknek a teszt megírása előtt és közben.

A hagyományos szöveges feladatokat tartalmazó mérőeszköz esetében arra kértük a tanítókat, hogy az osztályukban a szöveges feladatok megoldásához kialakított szokásrenden ne változtassanak, a tanulókat semmilyen egyéb információval, utasítással ne lássák el.

A fejlesztő kísérlet hosszabb távú hatásának igazolásaként a kísérleti csoport a kimeneti teszteket (realisztikus szöveges feladatok, PISA-feladat és a hagyományos szöveges feladatok) egy hónap elteltével (a fejlesztő kísérletről, valamint az érintőleges késleltetett utómérésekről bővebben Csíkos 2012), 2024 júniusában újra kitöltötte. Az utómérés és a késleltetett utómérés adatfelvételének körülményeit változatlan formában hagytuk meg, és kértük a pedagógusoktól.

Eredmények

Matematikai készséget mérő teszt

A matematikai készséget vizsgáló teszt megoldottsága a teljes mintán: 73%. A kísérleti csoportban (N=86) 71%, a kontrollcsoportban (N=83) pedig 75%. Ez igazolja azt, hogy a kísérleti és a kontrollcsoport tanulói hasonló matematikai készségekkel rendelkeztek a fejlesztő kísérlet megkezdése előtt. 1. táblázat

1. táblázat
Matematikai készségszintmérő feladatain elért átlagértékek

Tudáselem (item)	Kísérleti csoport (N=86) %	Kísérleti csoport átlag(N=86) (szórás)	Kontrollcsoport (N=83) %	Kontrollcsoport átlag (N=83) (szórás)
számfogalom (7)	94	6,57 (1,50)	97	6,83 (1,08)
műveleti fogalmak (6)	88	5,29 (1,49)	83	4,98 (1,80)
helyiérték azonosítás (5)	84	4,22 (1,07)	90	4,51 (0,86)
alapműveletek (14)	61	8,57 (4,67)	77	10,88 (3,2)
nyitott mondatok megoldása (7)	45	3,16 (2,06)	50	3,52 (2,36)
szabályok felismerése (7)	55	3,87 (2,65)	59	4,12 (2,61)
kombinatorika (1)	66	0,66 (0,48)	73	0,73 (0,44)

A matematikai készségszintmérő teszt részeredményei *(1. táblázat)* azt mutatják, hogy a műveleti fogalmak tudáselem az egyetlen terület, ahol a kísérleti csoport jobb teljesítményt mutatott. Mindkét vizsgált csoport a legjobban a számfogalom (94% és 97%), míg lerosszabban a nyitott mondatok (45% és 50%) tudáselem területen teljesítettek. A legnagyobb különbség az alapművelet tudáselem során elért eredményekben mutatkozik (61% és 77%).

Kimeneti tesztek megoldottsága

A kimeneti tesztek hagyományos szöveges feladatain a kísérleti és a kontrollcsoport közti különbséget *a 2. táblázat* mutatja. A legnagyobb megoldottsága az egész mintán (N=169, 78%), és a részmintákon (79% és 76%) a 2. feladatnak volt. Az eredményekből látszik, hogy a kísérleti csoport tendenciózusan jobb teljesítményt nyújtott a hagyományos szöveges feladatok megoldottságában, mint a kontrollcsoport. Az adatok rögzítésekor figyeltük, hogy megjelenik-e valahol rajzos ábrázolás a megoldás során. Azonban sem a kísérleti, sem a kontrollcsoportban nem készítettek a gyerekek vizuális reprezentációt, mely segíthetné őket a megoldásban.

2. táblázat

Hagyományos szöveges feladatok megoldottságának értékei

Hagyományos szöveges feladat	Kísérleti csoport (N=86) %	Kontroll csoport (N=83) %	Összesen (N=169) %
1. feladat	65	75	70
2. feladat	79	76	78
3. feladat	52	41	47
4. feladat	63	49	56

Jelen tanulmányban a realisztikus feladatok elemzését kizárólag a megoldottságuk alapján elemezzük. A realisztikus feladatok esetében a korábbi kutatások mintáit alapul véve akkor tekintettük a feladatot megoldottnak, ha realisztikus választ adott a tanuló (vö. Verschaffelt, 1994; Csíkos, 2003). A megjelenő realisztikus válaszok gyakorisága a kontroll- és kísérleti csoportban a *3. táblázatban* látható. Az eredmények azt mutatják, hogy mind az öt esetben a kísérleti csoport tagjai adtak nagyobb mértékben realisztikus választ a feladatok megoldásában. A legnagyobb mértékben az 1. feladat (18% és 11%) és a 3. feladat (14% és 7%) megoldottsága esetében látható különbség a kísérleti és a kontrollcsoport között. A 2. és a 5. feladatban a megoldottság nem tér el nagy mértékben, a kísérleti csoport tagjainak 1%-a adott realisztikus választ, míg a kontrollcsoportból egy tanuló sem oldotta meg realisztikus módon a feladatot. 3. táblázat

3. táblázat

Realisztikus szöveges feladatok megoldottságának értékei a kísérleti és a kontroll csoportban

Realisztikus szöveges feladatok	Kísérleti csoport realisztikus válasz (N=86) %	Kontrollcsoport realisztikus válasz (N=83) %
1. feladat	12	18
2. feladat	1	0
3. feladat	14	7
4. feladat	17	14
5. feladat	1	0

A PISA 2003-as dobókockás feladatok megoldottsága során, a kutatásunk eredményei mutatják a megoldottságban a legnagyobb eltérést a kísérleti és a kontrollcsoport között. A kísérleti csoportban a megoldottság 67%, míg a kontrollcsoportban ez a mutató 34%. A kétmintás T-próba elemzés azt mutatta, hogy a PISA 2003-as dobókockás feladat megoldottságában szignifikáns különbség mutatkozik fejlesztő kísérletben való részvétel (*M*=0,67*;* *SD*=0,47) és a kontrollcsoport (*M*=0,34*;* *SD*=0,48) között, t*(167)*= 0,473, $p<0{,}001$. A fejlesztő hatás mértéke – Morris (2005) tanulmánya alapján – közepesnek mondható.

A késleltetett utómérés eredményei

A kimeneti mérés után egy hónappal, a kísérleti csoporttal újra felvettük a kimeneti teszteket változatlan formában. A *4. táblázatban* látható, hogy a kimeneti mérés és késleltetett utómérés eredményei között milyen eltérések láthatók.

4. táblázat
A realisztikus feladatok megoldottságának értékei a a kimeneti és a késleltetett utómérés során a kísérleti csoport körében (N=86)

Realisztikus szöveges feladatok	Kimeneti mérés realisztikus válasz %	Késleltetett utómérés realisztikus válasz %
1. feladat	12	7
2. feladat	1	0
3. feladat	14	30
4. feladat	17	19
5. feladat	1	1

A hagyományos szöveges feladatok megoldottsága a kísérleti csoportban (N=86) 22%-ról 20%-ra, a dobókockás feladat megoldottsága 67%-ról 65%-ra csökkent. A realisztikus feladatok kimeneti és késleltetett utómérés során mutatott eredményei tendenciózusan hasonlók. A legnagyobb visszaesés az 1. feladat esetében érhető tetten (12% és 7%). A 3. feladat esetében a késleltetett utómérésen közel kétszer magasabb arányban adtak a gyerekek realisztikus választ (14% és 30%).

Összegzés

Kutatásunk legfontosabb eredményeként azt említhetjük, hogy fejlesztő kísérletünk hatására nőtt az esszenciális rajzot tartalmazó PISA 2003-as matematikai dobókockás feladat megoldottsága a kísérleti csoportban.

A fejlesztő kísérlet során három kérdésre kerestünk választ. Elsőként azt vizsgáltuk, mutatkozik-e változás a hagyományos szöveges feladatok megoldásának sikerességében a fejlesztő kísérlet hatására. Eredményeink azt mutatják, hogy a kísérleti csoportban szereplő tanulók tendenciózusan nagyobb megoldottsági eredménnyel végezték el a hagyományos szöveges feladatokat, de a kísérleti fejlesztéssel szoros összefüggés nem volt kimutatható. Az eredményekben való legnagyobb elmozdulás a kísérleti csoport eredményeiben a kontroll csoporthoz képest a 3. és 4. feladatban volt tetten érthető. Mindkét szöveges feladat megegyezik abban, hogy fordított szövegezésű volt.

Az adatok elemzése során megfigyeltük, hogy bár a kimeneti mérést megelőző fejlesztő időszakban a tanulók vizuális elemekkel dolgoztak a matematikaórákon, mégsem alkottak a feladatmegoldás során semmilyen vizuális reprezentációt. Ennek oka lehet a feladatok témája, vagy struktúrája, melyet a tanulók úgy ítéltek meg, hogy nem igényelnek efféle tevékenységet. De az okok mögött a tantermi, a tanító által kialakított szokásrend, megoldási stratégia (Csíkos & Szitányi, 2020) is állhat.

Kutatásunk második kérdésében arra kerestük a választ, hogy a fejlesztő kísérlet hatására változott-e a realisztikus válaszok aránya a realisztikus szöveges feladatok esetén? Az eredményeink nem mutattak szoros összefüggést a fejlesztő kísérlet és a realisztikus válaszadások között. A 3. és 4. realisztikus szöveges feladat esetében azonban tendenciózusan megnőtt a realisztikus válaszadások aránya a kísérleti csoportban. A 3. feladat esetében az késleltetett utómérés során a realisztikus válaszok aránya közel kétszeresére nőtt.

Végül, kutatásunk harmadik kérdésében azt vizsgáltuk, hogy a fejlesztő kísérlet hatására nő-e az esszenciális rajzot tartalmazó szöveges matematikai feladatok megoldottságának aránya. Ennek megválaszolására a tanulóknak a kimeneti mérésen egy 2003-ban publikált PISA matematikai feladatot használtunk a felmérésben. A feladat egy hiányos szövegezésű, de esszenciális ábrával kiegészített szöveges matematikai feladat volt. A feladat idősebb korosztálynak készült, mégis korábbi kutatásaink középpontjába került, hiszen megoldásához elemi matematikai ismeretekre van szükség. Az elemzés során azt az eredményt kaptuk, hogy a fejlesztő kísérletünkkel mérhető közepes fejlesztő hatást értünk el, a feladat megoldottsága tekintetében. A feladat megoldottsága az korábbi kutatásaink során kapott eredmények és az OECD-s eredmények fölé emelkedett. Elmondhatjuk tehát, hogy annak hatására, hogy a tanulók 12 tanórán keresztül esszenciális ábrákat tartalmazó szöveges matematikai feladatokat oldottak meg osztálytermi környezetben, jobb teljesítményt tudnak nyújtani az ilyen, akár nemzetközi mérésekben szereplő szöveges matematikai feladatokban.

Kutatásunk összességében az alábbi eredményt hozta: ha az alsós korosztály matematikaoktatás során intenzívebben találkozik esszenciális rajzot tartalmazó szöveges matematikai feladattal, akkor akár felkészültebbek lehetnek egy készségeket mérő nemzetközi kutatás során. A fejlesztő kísérlet hatására pozitív eredmények születtek a fordított szövegezésű hagyományos feladatok megoldásában, és a tanulók nagyobb arányban tudták megoldani a realisztikus szöveges feladatokat.

Kutatásunknak több tényező is korlátot állított. Az adatrögzítés nem reprezentatív módon történt, így a kapott eredmények nem általánosíthatók és a nagy mértékben függenek a minta háttértulajdonságaitól. Kutatásunk korlátai közé tartozik, hogy a kimeneti tesztekben szereplő feladatokat tovább lehetne strukturálni, hogy még differenciáltabb képet kaphassunk a fejlesztő kísérlet hatásairól. Az eredményeket további háttéradatok ismeretében tovább tudtuk volna árnyalni. Az eredményeket pedagógus- és tanulói interjúval tovább lehetne mélyíteni, megismerve gondolkodásukat a kísérletben használt változókról.

Az matematikaoktatás mindennapi gyakorlata számára a szöveges matematikai feladatok tanítása problémás tudáselem. A tanulók számára problémás témakör annak ellenére, hogy a szöveges feladatok már első osztályban megjelennek. A kutatás eredményei arra mutatnak rá, hogy a sikeres feladatmegoldás arányainak növelése érdekében érdemes minél színesebb és árnyaltabb típusú szöveges feladatokkal megismertetni a gyerekeket. Különös tekintettel a hiányos szövegezésű, realisztikus vagy esszenciális rajzot tartalmazó feladatokra.

Köszönetnyilvánítás:

A kutatást az MTA Közoktatás-fejlesztési Kutatási Programja támogatta.

Irodalom

Berends, I. E. & Van Lieshout, E. C. (2009). The effect of illustrations in arithmetic problem-solving: Effects of increased cognitive load. *Learning and Instruction, 19*(4), 345–353. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2008.06.012

Cummins, D. D. (1991). Children's interpretations of arithmetic word problems. *Cognition and instruction*, *8*(3), 261–289. https://doi.org/10.1207/s1532690xci0803_2

Csapó, B. (2003). *A képességek fejlődése és iskolai fejlesztése*. Akadémiai Kiadó.

Csíkos, Cs. (2003). Matematikai szöveges feladatok megértésének problémái 10–11 éves tanulók körében. *Magyar Pedagógia, 103*(1), 35–55.

Csíkos, Cs. (2008). Mentális modellek és metareprezentációk matematikai szöveges feladatok megoldásában. Egy fejlesztőkísérlet elméleti alapjai. In Kozma, T. & Perjés, I. (Eds.), Új kutatások a neveléstudományokban (pp. 109–117). MTA Pedagógiai Bizottság.

Csíkos, Cs., Szitányi, J. & Kelemen, R. (2010). Vizuális reprezentációk szerepe a matematikai problémamegoldásban. Egy 3. osztályos tanulók körében végzett fejlesztő kísérlet eredményei. *Magyar Pedagógia*, *110*(2), 149–166.

Csíkos, Cs. (2012). *Pedagógiai kísérletek kutatásmódszertana.* Gondolat.

Csíkos, C. & Szitányi, J. (2020). Teachers' pedagogical content knowledge in teaching word problem solving strategies. *ZDM*, *52*(1), 165–178. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01115-y

Csíkos, C., Szitányi, J. & Kelemen, R. (2012). The effects of using drawings in developing young children's mathematical word problem solving: A design experiment with third-grade Hungarian students. *Educational Studies in Mathematics, 81*, 47–65. https://doi.org/10.1007/s10649-011-9360-z

Csíkos, C. & Verschaffel, L. (2011). Mathematical literacy and the application of mathematical knowledge. *Framework for diagnostic assessment of mathematics*, 57–93.

De Corte, E., Verschaffel, L. & Op't Eynde, P. (2000). Self-regulation: A characteristic and a goal of mathematics education. In *Handbook of self-regulation* (pp. 687–726). Academic Press. https://doi.org/10.1016/B978-012109890-2/50050-0

Dewolf, T., Van Dooren, W., Hermens, F. & Verschaffel, L. (2013, July). Do students attend to and profit from representational illustrations of non-standard mathematical word problems? In *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 217–224).

Elia, I. & Philippou, G. (2004). *The Functions of Pictures in Problem Solving.* International group for the psychology of mathematics education.

Hegarty, M. & Kozhevnikov, M. (1999). Types of visual–spatial representations and mathematical problem solving. *Journal of Educational Psychology*, *91*(4), 684. https://doi.org/10.1037/0022-0663.91.4.684

Hidayatullah, A. & Csíkos, C. (2023). Students' responses to the realistic word problems and their mathematics-related beliefs in primary education. *Pedagogika, 150*(2), 21–37. https://doi.org/10.15823/p.2023.150.2

Kelemen, R. (2004). Egyes háttérváltozók szerepe „szokatlan" matematikai szöveges feladatok megoldásában. *Iskolakultúra, 14*(11), 28–38.

Kelemen, R. (2006). Nemzetközi tendenciák a matematikai szöveges feladatok elméletében. *Iskolakultúra, 16*(1), 56–65.

Kelemen, R. (2007). Fejlesztő kísérletek a realisztikus matematikai problémák megoldásában. *Iskolakultúra, 6*, 7.

Mayer, R. E. & Hegarty, M. (2012). The process of understanding mathematical problems. In *The nature of mathematical thinking* (pp. 29–53). Routledge.

McNeil, N. M., Uttal, D. H., Jarvin, L. & Sternberg, R. J. (2009). Should you show me the money? Concrete objects both hurt and help performance on mathematics problems. *Learning and Instruction, 19*(2), 171–184. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2008.03.005

Morris, S. B. (2005). *Effect size estimation from prestest–posttest–control designs with heterogeneous variances.* Paper presented at the 20th Annual Conference of the Society for Industrial and Organizational Psychology, Los Angeles, CA.

OECD (2004). *Learning for tomorrow's world: First results from PISA 2003*. https://doi.org/10.1787/9789264006416-en

OECD (2006). *PISA released items – Mathematics.* https://www.oecd.org/pisa/38709418.pdf (2025. 01. 30.)

Schnotz, W. (2002). Commentary: Towards an integrated view of learning from text and visual displays. *Educational Psychology Review, 14*, 101–120. https://doi.org/10.1023/A:1013136727916

Turzó-Sovák, N., Berecki, I., Csíkos, Cs. & Hidayatullah, A. (2025). Cognitive metacognitive and affective factors behind performance on a PISA task; A Hungarian-Indonesian comparative study (submitted for publication).

Viitala, H. (2015). Two Finnish girls and mathematics: Similar achievement level, same core curriculum, different competences. *LUMAT: International Journal on Math, Science and Technology Education, 3*(1), 137–150. https://doi.org/10.31129/lumat.v3i1.1056

Verschaffel, L. & De Corte, E. (1997). Word problems: A vehicle for promoting authentic mathematical understanding and problem solving in the primary school? In T. Nunes & P. Bryant (Eds.), *Learning and teaching mathematics: An international perspective* (pp. 69–97). Psychology Press.

Verschaffel, L., De Corte, E., Lasure, S., Van Vaerenbergh, G., Bogaerts, H. & Ratinckx, E. (1999). Design and evaluation of a learning environment for mathematical modeling and problem solving in upper elementary school children. *Mathematical Thinking and Learning, 1*(3), 195–230. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0103_2

The role of essential illustrations in a design experiment

The study reports the results of a developmental experiment conducted in the third grade of a suburban primary school in Budapest. The aim of this research was to help students to with the text of mathematical problems involving essential (Berends & Van Lieshout, 2009) figures. Students had to carry out 12 pairs of tasks containing of which design is considered to be essential for successful problem solving. We hypothesized that pupils participating in the experiment would be better able to solve this type of mathematical problem and that there would be an increase in the percentage of realistic answers to realistic (Verschaffel, 2009) textual problems. Our results suggest a tendency for the test group to increase the percentage of realistic responses to realistic text tasks, and a significant improvement was also observed in a PISA task. The results of the study can be used as a resource for in-service teachers in the field of mathematics education and problem solving.

Keywords:

essential illustration, design experiment, word problem, problemsolving, elementary school