A marosvásárhelyi sztereografikus koordináták dátumparaméterei

KERKOVITS Krisztián[1]

[1]Eötvös Loránd Tudományegyetem, Informatikai Kar, Térképtudományi és Geoinformatikai Intézet

E-mail: kerkovits@map.elte.hu

DOI: 10.30921/GK.78.2026.3.1

Absztrakt

Jelen munka célja egy olyan módszertan bemutatása, amellyel kevés illesztőpont ismeretében is meghatározhatók egy geodéziai dátum Burša–Wolf-paraméterei. A képletek segítségével mindössze öt pont alapján is megbízhatóan rekonstruálható a KD1890 dátum elhelyezkedése az ETRS89 dátumhoz képest. A paraméterek helyességét korabeli térképek georeferálásával ellenőriztem. A mai román topográfiai adatbázis és a térképi tartalom közötti eltérés a felhasznált illesztőpontoktól igen távol eső háromszögelési pontok környékén is jelentősen a térkép rajzi hibája alatt (3-8 m) maradt. E tanulmány alapján a marosvásárhelyi sztereografikus vetület térinformatikai használatához a kettős leképezésű sztereografikus vetületet (sterea) kell kiválasztanunk Bessel 1841 ellipszoidra. A dátumparaméterek (koordináta-rendszer elforgatásával) 543,31 m; −181,68 m; 528,67 m; 22,402″; 10,159″; 25,967″; 11,190 ppm. A kezdőpont ellipszoidi koordinátái é. sz. 46° 33′ 06,4273″, k. h. 24° 23′ 34,9350″; a redukciós tényező 1; a koordinátákat mindkét irányban 600 000 m-rel kell eltolni. A függelékben a WKT-definíció is megtalálható.

Abstract

This paper shows a method, which can be used to determine the parameters for a 3D Helmert transformation of an old datum using only a few base point coordinates. Using the formulae, a reliable solution is found for the alignment of datum KD1890 with respect to ETRS89 based on only five points. Results were checked against georeferenced map sheets from that era. Difference between the recent Romanian topographic database and map content remained far below drawing accuracy of the sheets (3-8 m) even in the neighbourhood of triangulation points far from the origin. Based on the present study, one should pick the Double stereographic (sterea) projection for Bessel 1841 spheroid to approximate the Marosvásárhely Stereographic projection in a GIS environment. The datum parameters (coordinate frame convention) are 543.31 m; −181.68 m; 528.67 m; 22.402″; 10.159″; 25.967″; 11.190 ppm. Latitude and longitude of origin are 46° 33′ 06.4273″ N, 24° 23′ 34.9350″ E; scale factor is 1, false easting and false northing are both 600 000 m. The WKT representation of these parameters may be found in the Appendix.

1. A kutatás előzményei

Jelen tanulmány előzménye egy egyszerűnek látszó feladat volt. Az ELTE térképtárában elérhető volt Észak-Erdély 1941-es felmérésének ötvenezres méretarányú térképműve. Ezt változáskövetés céljából szerettem volna egy mai légifelvétellel összehasonlítani. Ezért vált szükségessé a térképszelvények georeferálása, amely egy térképészetben jártas szakember számára rutinfeladat. Ugyanakkor a térképeken alkalmazott koordináta-rendszerek (budapesti, ill. marosvásárhelyi sztereografikus) nem álltak rendelkezésre az alkalmazott QGIS szoftverben. A budapesti rendszerrel nagy probléma nem akadt. Timár, Molnár és Márta (2003) cikkében ugyanis az összes szükséges paraméter megtalálható. Némi problémát jelentett ugyan, hogy Timár kissé eltérő Ferro–Greenwich hosszúságkülönbséget alkalmazott, mint a térképmű, azonban a néhány másodperces eltérés a megfelelő paraméter azonos mértékű korrekciójával egyszerűen feloldható volt (Kerkovits–Gede 2023). Ezáltal a QGIS „betanítható” a koordináta-rendszer kezelésére.

Kellemetlen meglepetés volt a marosvásárhelyi rendszert alkalmazó szelvények illesztése. Itt eleve problémát okozott, hogy Timár et al. (2004) és Timár et al. (2007) állítólag azonos módszertannal, azonos adatokból két eltérő paramétersort közöl eredményként. Sajnos azonban egyik paramétersorral sem sikerült a térképeket kellő pontossággal összeilleszteni, a térképszelvények tartalma kb. 20-60 méterrel elcsúszva jelent meg a szoftverben. Ekkora mértékű pontatlanság az 1941-es technológia (légi fotogrammetriai alapú felmérés) mellett elképzelhetetlennek tűnt, így a gyanú arra terelődött, hogy a szakirodalomban megadott paraméterek revízióra szorulnak.

2. Elméleti háttér

2.1. Dátumtranszformációk

A témában kevéssé járatos olvasó számára röviden és pongyolán úgy magyarázható a probléma oka, hogy a külön-külön kiegyenlített alapponthálózatok ugyanazon pontokra eltérő földrajzi

koordinátákat adnak meg. Ennek oka csak részben vezethető vissza mérési hibákra, sokkal jelentősebb eltérést okoz, hogy azokon a csillagászati-geodéziai alappontokon, ahol a földrajzi koordinátákat egy vonatkozási rendszer létesítésekor a helyi függőlegeshez képest meghatározták, a helyi függőleges és a Földet közelítő ellipszoid normálisa nem esik egybe. Ezt a korai önkényes tájékozású dátumokon nem vették figyelembe, a hálózat kezdőpontján az ún. függővonal-elhajlást zérusnak tekintették (Homoródi 1952).

A fentiek miatt eltérő számértékű koordináták illesztéséhez szükséges egy közelítő transzformációs modell alkalmazása. Legegyszerűbb a Mologyenszkij-transzformáció, amely egy térbeli eltolással illeszti össze a két hálózat koordináta-rendszerét. Azonban egy alapponthálózat koordinátáit a kezdőpontban tapasztalható függővonal-elhajláson (és az ebből adódó eltérő földrajzi koordinátákon) kívül befolyásolja még a kezdőirányban mért azimut hibája (hiszen egy hálózat első élének azimutját nem lehet háromszögeléssel származtatni, ahhoz csillagászati mérés szükségeltetik), amelytől az alapponthálózat a középpont körül kissé „elfordul". További hibát okoz, ha a fejlesztéshez használt alapvonal hosszát tévesen határozzák meg, mert ennek hatására a fejlesztett háromszögoldalakat arányosan rövidebbnek vagy hosszabbnak fogjuk számítani. Ezzel szemben kisebb a hatása a helyi szögmérési hibáknak, mert a durva hibák a kiegyenlítések során feltűnnek, a kisebb véletlen hibák pedig statisztikai alapon egymást hellyel-közzel kiejtik. E tapasztalatokra építve terjedt el a hét paraméteres Burša–Wolf-transzformáció, amely a helyi szögmérési hibákat elhanyagolja, de az azimutmérési hibát egy térbeli elforgatás három paraméterével, az alapvonal mérési hibáját pedig egy skálaparaméterrel korrigálja a három eltolási paraméteren felül.

E két transzformáción kívül más eljárások is ismertek, azonban azok nem terjedtek el ennyire széleskörűen, továbbá legtöbbször csak geodéziai pontosság kívánalma esetén szükséges alkalmazásuk. Jelen dolgozatban a térképek illesztéséhez méteresnél nagyobb pontosság nem szükségeltetik. Ennek ellenére a részszámításokat, ahol csak lehetséges volt, centiméter, illetve ezred szögmásodperc élességgel végeztem. Ezért remélhető, hogy az itt levezetett paraméterek akár kataszteri térképek illesztéséhez is megfelelő kiindulási alapot adhatnak.

2.2. A marosvásárhelyi rendszer rövid története

A magyarországi sztereografikus rendszerek megalkotása az 1860-as évek elején történt. A választott kettős leképezésű sztereografikus vetület szögtartása miatt merész újításnak számított ebben az időben:

Gauss Hannover felmérésekor, az 1820-as években alkotta meg az első geodéziai célú szögtartó vetületet, a Gauss–Krüger-vetületet. Bár szögtartó vetületek ismertek voltak korábban is, azokat a földmérés nem használhatta, mert gömb alapfelületre lettek kiszámítva. Ugyanakkor a kijött képletek logarléccel nehézkesen voltak számíthatók, ezért Gauss már ekkoriban javasolja szögtartó gömbvetület alkalmazását, hogy a geodéziai számításokat igen kis hibával egyszerűbb gömbi képletek segítségével végezhessük. Az alapötlet többszöri finomításával Gauss 1843-ban jut el a kis torzulású szögtartó gömbvetület ma ismert képleteire (Gauß 1843). Ennek eredményeképp bármelyik szögtartó vetület alkalmazhatóvá vált geodéziai célokra, hiszen Gauss gömbvetületét alkalmazva a Föld igen jó közelítéssel gömb alakúnak tekinthető.

A magyar geodézia a lehetőséget a publikáció után kevesebb, mint húsz évvel, a világon elsőként ültette át a gyakorlatba (Varga 2003): a kataszteri térképeket a Habsburg Birodalomban elterjedt, közelítőleg területtartó poliédervetülettel ellentétben (a kiegyezést megelőzően ez meglehetősen bátor lépésnek tűnik) a szögtartó sztereografikus vetületben készítették. A vetület előnye, hogy szögredukciókat így már nem kellett számítani, a hossz- és irányredukciók a Gauss-gömbre vonatkozóan egyszerű képletekkel számíthatók. A Gauss-gömb torzulásai olyannyira csekélyek, hogy azokat bátran elhagyhatjuk: 0,05 ppm-et Erdélyben sehol nem érik el.

Történelmileg úgy alakult, hogy az alkalmazott ún. régi Gauss-gömb normálszélessége a korabeli országterület déli részén haladt át. Feltételezhető, hogy az eredeti elképzelés szerint a Habsburg Birodalom valamennyi tartományára ki akarták terjeszteni a rendszert. Ehhez képest végül csak két hálózat létesült a rendszerben: Magyarországon Budapest kezdőponttal, és Erdélyben (az unió csak 1867-ben jött létre) Marosvásárhely (Kesztej-hegy) kezdőponttal.

A hálózatok kialakítása leegyszerűsítve úgy történt, hogy a terepen mért szögeket ellátták a sztereografikus vetület irányredukcióival, majd a hálózatot már a sztereografikus síkon számították. A gömbi sztereografikus vetület lineármodulusa kizárólag a kezdőponttól mért távolság függvénye, független a kezdőpont szélességétől. A mért szögértékeket kizárólag második irányredukcióval kell ellátni (első irányredukció nincs a sztereografikus vetületben), amelynek mértéke szintén csak a pontok vetületi koordinátáinak függvénye. Ezért a Gauss-gömbön mért szögeket és távolságokat a Kesztej-hegy földrajzi koordinátáinak ismerete nélkül is át lehet számítani a vetületi síkra.

Ez azért fontos megállapítás, mert az alaphálózat kiegyenlítésekor a Kesztej-hegy hosszúsága egyáltalán nem volt ismert, és szintfelületi szélességre is csak egy ideiglenes, rossz pontosságú adat állt rendelkezésre. Fasching (1909) csak utólag rendelt földrajzi koordinátákat a ponthoz. Azonban a vetület megadásakor a térinformatikai szoftver kérdezni fogja a vetületi kezdőpont szélességét és hosszúságát. Mivel ez a sztereografikus vetület esetében a torzulásokat nem befolyásolja, gyakorlatilag bármilyen értéket megadhatunk, azonban a dátumparaméterek a dolgozatban említett képleteken keresztül függenek az utólag hozzárendelt koordinátáktól.

Hiába ismerjük azonban egy hálózatban minden háromszög oldalhosszait és szögeit, a csúcspontok az origóként szolgáló Kesztej-hegy körül bármekkora szöggel elforgathatók maradnak. Ezért valamelyik kitüntetett háromszögoldal azimutját rögzítenünk kell, utána kaphatunk csak derékszögű koordinátákat. Ebben az időben kizárólag a Tiglamor irányába mért szintfelületi azimut volt ismert, az is csak gyenge pontossággal (Fasching 1909). Mivel a szintfelületi és földrajzi hosszúságok nem voltak

ismertek, a kezdőazimutot nem lehetett ellipszoidra redukálni. Jobb híján a Tiglamor felé mért szintfelületi azimutnak megfelelően forgatták el a hálózatot, azonban e miatt (mint azt látni fogjuk), a marosvásárhelyi rendszer függőleges koordinátatengelye a földrajzi északkal kb. fél perces szöget zár be. Ez az elfordulás a térképek georeferálásakor szabad szemmel is látható volt.

A Kesztej-hegy hosszúságának meghatározása szerencsétlen véletlenek összjátéka miatt meglehetősen pontatlanra sikeredett. Ennek oka, hogy a ponton szintfelületi hosszúságot sohasem mértek. Ugyanakkor tudjuk, hogy a Széchenyi-hegyen mért szintfelületi hosszúság hibája tíz szögmásodperc körüli volt (Homoródi 1953), és ez a hiba átterjedt a Gellért-hegy hosszúságának és a Naszály azimutjának levezetett értékére is (utóbbi hibája kb. hat szögmásodperc volt). Fasching (1909) bár a magyar és erdélyi háromszöghálózatok összekapcsolásával szabatosan határozta meg a Gellért-hegy és a Kesztej-hegy távolságát és azimutját, ezt a Gellért-hegy hibás hosszúságából egy eleve hibás kezdőazimuttal ellátott rendszerben első geodéziai főfeladattal földrajzi koordinátákká alakította, ami a hibák halmozódásához vezetett. Ezért a Kesztej-hegy hosszúsága húsz szögmásodperccel tér el a korszerű dátumokon ismert értéktől. Ez még az akkori pontossági elvárásokat is messze alulmúlja.

Ez a hiba két tekintetben lesz hatással jelen tanulmányra. Egyfelől a transzformáció eltolási értékeire meglepően nagy számok (kb. fél kilométer) fognak kijönni, másfelől az általában az azimutoknak csak csekély megváltozását okozó Laplace-egyenlet ezúttal feltűnően nagy korrekciót okoz (hiszen a Laplace-egyenlet szerint az azimutok megváltozása egyenes arányban áll a hosszúság megváltozásával).

3. A tájékozási paraméterek számítási menete

3.1. Mologyenszkij-paraméterek számítása

Ahhoz, hogy egy koordináta-rendszer elhelyezését egy másikhoz képest vizsgálni tudjuk, olyan pontokra van szükségünk, amelyeknek koordinátái mindkét rendszerben ismertek. A mi esetünkben a legnagyobb nehézséget a marosvásárhelyi koordináták hozzáférhetetlensége okozza. A Kesztej-hegy koordinátái triviálisak (origó), azon kívül azonban egyetlen felsőgeodéziai cikkben (Oltay 1914) találkoztam a Tiglamor pont koordinátáival (ez azért kedvező, mert a rendszer tájékozása szempontjából kitüntetett pont). Továbbá Fasching (1909) a budapesti és marosvásárhelyi rendszerek összeillesztéséhez megadja négy partiumi pont koordinátáit. Az érintett pontok mindegyike jelenleg is létezik a terepen, azonban az érmihályfalvi református templom tornyát a román földmérés nem használja háromszögelési pontként, így mai koordinátái nem voltak hozzáférhetők. A többi pont esetén az ANCPI (román földmérési intézet) ingyenesen kiszolgáltatta a pontok koordinátáit S42 (Pulkovo) dátumon, Stereo70 rendszerben centiméteres, helyenként milliméteres pontossággal (1. táblázat).

A sztereografikus koordináták délnyugati tájékozással, bécsi ölben álltak rendelkezésre. Az 1935 után kiadott térképek sztereografikus koordinátái ezzel szemben méterben és északkeleti tájékozással értelmezendők. Ezért a koordináták mértékegységét át kellett váltani. Ezt követően a kapott értékeket 600 km-ből kivonva kapjuk az ún. katonai sztereografikus koordinátákat. Ezekből a Bessel-ellipszoidi adatokat a kettős leképezés törvényeivel, a szokásos módon számíthatjuk. A szakirodalomban található egymásnak kissé ellentmondó számértékek okán a régi Gauss-gömb paramétereit a Bessel-ellipszoid $f = 1/299{,}1528128$ lapultságából és a $\varphi_n = 46° 30'$ normálparallelkörből magam vezettem le. A Kesztej-hegy gömbi koordinátáit Fasching (1909) művéből vettem. A Ferro–Greenwich eltérés 17° 39′ 46,02″ (Timár 2007).

A térbeli összeillesztéshez szükséges a pontok ellipszoid feletti magassága is. Ez természetesen a sztereografikus rendszerben nem állt rendelkezésre, azonban a dátum önkényes elhelyezése miatt a geoidunduláció elhanyagolható. Ugyanakkor tengerszint feletti magasság is csak erősen pontatlanul rekonstruálható. A pontok ugyanis szintezés szempontjából nem voltak magasrendűek, magassági meghatározás az Adriai-tengerhez képest utoljára a III. katonai felmérés során történt (kivétel a Kesztej-hegy és a Varatik, amelyek a többi ponttal ellentétben visszakerültek Magyarországhoz a II. bécsi döntést követően). Ezeknek számértékei több méterrel térnek el a ma ismert magasságoktól, így még az is használhatóbb, ha a ma ismert magassági értékükhöz hozzáadjuk a Fekete-tenger (Konstanca) és Adriai-tenger (Trieszt) közötti kereken 30 cm magasságkülönbséget (Ihde–Sánchez 2005). Mindazáltal megjegyezzük, hogy a magassági értékek pedáns meghatározása nem kell célunk legyen, ha a transzformációt amúgy is csak vízszintes értelemben kívánjuk alkalmazni.

A Stereo70 koordináták közvetlenül nem használhatók a transzformációra. Ezeket WGS84 (valójában ETRS89) rendszerbe az ANCPI honlapjáról ingyenesen letölthető, területünkön legroszszabb esetben 10 cm pontosságot ígérő (vízszintes értelemben ennél is pontosabb) TransDatRo programmal számítottam át. Mivel a programba épített geoidmodell ellipszoid feletti magasságok kiírására is alkalmas volt, ezeket közvetlenül fölhasználhatjuk a számításhoz.

A fenti leírás alapján levezetett koordináták a 2. táblázatban olvashatók.

A rendelkezésre álló illesztőpontok száma egyrészt kevés, másfelől erősen inhomogén eloszlásuk miatt (Erdély keleti részéről egyáltalán nem áll rendelkezésre pont) nem tekinthetők reprezentatívnak. Azonban az öt pontból kettő kitüntetett szerepű. A Kesztej-hegy a rendszer kezdőpontja, míg a Tiglamor a dátumot definiáló azimut végpontja (Fasching 1909). Ezeket kihasználva reprezentatívnak tekinthető elhelyezési paramétereket számíthatunk. A kezdőpont Bessel-ellipszoidi és WGS84-koordinátáiból kiszámíthatók a rendszer Mologyenszkij-paraméterei. Legyen:

$$N(\Phi) = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \Phi}}$$

Táblázat 1. A számításhoz fölhasznált illesztőpontok koordinátái különböző vonatkoztatási rendszerekben.

Név	MVH sztereografikus		Stereo70		Fekete-tengeri
	Y (öl)	*X* (öl)	*Y* (m)	*X* (m)	*H* (m)
Kesztej-hegy *(Dealul Câsteii)*	+0,000	+0,000	453190,734	561657,545	523,927
Tiglamor *(Țigla Moruț)*	+7463,794	–11474,076	439208,277	583525,744	504,857
Varatik *(Vârful Văratec)*	+75717,833	–34113,779	310116,440	627453,270	756,970
Magura-Korbest *(Măgura Corbești)*	+85967,983	–22324,811	290508,030	605247,110	560,710
Pless *(Pleșu)*	+89470,988	–246,150	283545,577	563431,067	1112,444

Táblázat 2. Az 1. táblázat adatai alapján saját számítással levezetett koordináták az illesztőpontokra.

Név	Katonai sztereogr.		KD1890 (Bessel)		Adriai	WGS84 (ETRS89)		
	Y (m)	*X* (m)	Φ	Λ	*H* (m)	Φ	Λ	*h* (m)
Kesztej-hegy	600000,000	600000,000	46° 33′ 06,4272″	24° 23′ 34,9331″	524,23	46° 33′ 10,47394″	24° 23′ 16,46260″	563,126
Tiglamor	585845,035	621760,400	46° 44′ 50,6678″	24° 12′ 27,9854″	505,16	46° 44′ 54,75012″	24° 12′ 09,63184″	544,298
Varatik	456402,353	664696,231	47° 07′ 05,7088″	22° 30′ 01,8738″	757,27	47° 07′ 09,77112″	22° 29′ 44,11186″	798,445
Magura-Korbest	436963,109	642338,643	46° 54′ 45,8438″	22° 15′ 08,9677″	561,01	46° 54′ 50,00506″	22° 14′ 51,26067″	602,544
Pless	430319,717	600466,819	46° 32′ 04,5202″	22° 10′ 50,7041″	1112,74	46° 32′ 08,83992″	22° 10′ 32,97284″	1154,884

Ekkor a pontok térbeli derékszögű koordinátáit így számíthatjuk:

$$x = N(\Phi)\cos\Phi\cos\Lambda$$
$$y = N(\Phi)\cos\Phi\sin\Lambda$$
$$z = \left(1-e^2\right)N(\Phi)\sin\Phi$$

Fontos, hogy *a* és *e* helyére mindig annak az ellipszoidnak a félnagytengelyét és excentricitását helyettesítsük, amelyik ellipszoidon éppen számolunk. A Mologyenszkij-transzformáció eltolási paraméterei ezen koordináták egyszerű különbségeként számíthatók.

A képletekbe a Kesztej-hegy koordinátáit helyettesítettem be. A félreértések elkerülése céljából a Bessel-ellipszoidi koordinátákat *nem* saját számításomból (2. táblázat) vettem, hanem a szakirodalomban már elterjedt Fasching-féle $\Phi = 46° 33′ 06{,}4273″$; $\Lambda = 24° 23′ 34{,}935″$ értéket helyettesítettem (a csekély eltérés kerekítési hibának is betudható). Ellipszoid feletti magasságnak a számított adriai magasságot vettem figyelembe, ez mindössze 3 cm-rel tér el az 1941-es topográfiai térképen 1 dm élességgel feltüntetett magasságtól. Az eredményül kapott KD1890 → ETRS89 Mologyenszkij-transzformáció: $dx_m = 589{,}61$ m; $dy_m = -164{,}74$ m; $dz_m = 580{,}23$ m.

Bár az itt levezetett értékekkel is a térképszelvények illeszkedése látványosan javult Timárék paramétereihez képest (különösen a kezdőpont közvetlen környezetében), a georeferálást követően az Erdély peremterületein található szelvények kis mértékű elfordulását tapasztaltam. Ennek oka nagyobbrészt a már említett ideiglenes kezdőazimut használatából eredő elcsavarodás, kisebbrészt a WGS84 dátumon számított azimutok eltérése a Kesztej-hegyen mérhető szintfelületi azimutoktól. Továbbá ugyanitt a szelvények kissé a Kesztej-hegy irányába elmozdultak. Ennek oka a korabeli alapvonalak hosszmérési hibájában kereshető. Ezért a Mologyenszkij-transzformáció nem tudta a kívánt pontossági igényt kielégíteni.

Megjegyezzük, hogy az itt közölt paraméterek csekély mértékben eltérnek a kutatás korábbi fázisából származó értékektől (Kerkovits–Gede 2023), mert akkor még nem számoltunk a Fekete-tenger és az Adriai-tenger eltérő tengerszintjével. A különbség vízszintes értelemben eltérést nem okoz. Felhívom a figyelmet, hogy Timár et al. (2003, 2004) paraméterei Kesztej-hegynek nem az ellipszoidi, hanem a szintfelületi szélességére vonatkoznak! Timárék paramétereit használva ezért a Kesztej-hegy szintfelületi szélessége írandó a térinformatikai szoftverbe.

3.2. Burša–Wolf-paraméterek számítása

A hosszmérésből és a kezdőazimut hibájából származó eltéréseket a következő transzformációval korrigálhatjuk:

1. A Bessel-ellipszoidra vonatkozó térbeli derékszögű koordináta-rendszer középpontját eltoljuk a Föld középpontjából a Kesztej-hegyre.
2. A koordináta-rendszert elforgatjuk a Kesztej-hegyen átmenő helyi függőleges körül egy kicsike α szöggel.
3. A koordinátákat egy egyhez közeli skalárral beszorozva korrigáljuk az alapvonal mérési hibáját.
4. A koordináta-rendszer középpontját visszatoljuk az 1. lépés eltolási vektorának ellentettjével. Ezáltal a 2. és 3. lépéseknek nem lesz hatása a Kesztej-hegy derékszögű koordinátáira.
5. Alkalmazzuk az előző részben kiszámított Mologyenszkij-transzformációt, hogy WGS84-koordinátákat kapjunk.

Az 1. lépés a Kesztej-hegy ismert térbeli derékszögű koordinátáinak kivonását jelenti. A 2. lépéshez meg kell határozni az α szöget. Ehhez a Tiglamor irányában mért 326° 57′ 22,76″ szintfelületi kezdőazimut eltérését vizsgáljuk a WGS84-ellipszoidon számítottól. A 2. táblázatban található ETRS89-koordinátákat betápláltam a geographiclib (Karney 2013) nevű ingyenes programba, amely a második geodéziai főfeladatot kiszámítva 326° 57′ 45,117″ azimutra jutott. Az eltérés 22,357″. Korábbi publikációmban (Kerkovits–Gede 2023) azonban elmulasztottam figyelembe venni, hogy a két ellipszoid normálisa nem esik egybe, ezért a két ellipszoid helyi vízszintesein a meridiánsíkok (északi irány) nem egyeznek. Az emiatt szükséges korrekció az azimutokra vonatkozó Laplace-egyenletből (Bíró et al. 2013):

$$\Delta\alpha = \left(\Lambda_w - \Lambda_k\right)\sin\Phi_k = -13{,}410''$$

ahol a *k* index a Kesztej-hegy Bessel-ellipszoidon mért, míg a *w* index a WGS84-en mért koordinátáit jelöli. Ezt is figyelembe véve az óra járásával ellentétes irányban α = 35,767″ elforgatás szükséges a Kesztej-hegy függővonala körül. A Laplace-korrekció szükségességét igazolja, hogy a megnövelt forgatási szög hatására a georeferált térképek jobban illeszkedtek a modern topográfiai adatbázisokhoz a magaslatokon található háromszögpontok környékén.

A 2. lépés transzformációs mátrixát a Rodrigues-féle forgatási mátrixból (Kovács 2011) származtathatjuk. Azonban, mivel α meglehetősen kicsi, és a transzformációt amúgy sem kívánjuk a Kesztej-hegytől távol alkalmazni, pontossági elvárásainkon belül élhetünk a $\sin\alpha \approx \alpha$ (radiánban) és $\cos\alpha \approx 1$ közelítésekkel. A dátum önkényes tájékozása miatt a Kesztej-hegyen a függővonal-elhajlás zérus, ezért a helyi függőleges az ellipszoid normálisa, amely az Egyenlítő síkjával éppen Φ_k, meridiánsíkja az *xz* síkkal pedig Λ_k szöget zár be, ahol Φ_k és Λ_k a Kesztej-hegy koordinátái a Bessel-ellipszoidon. Ebből a forgástengellyel párhuzamos egységvektor ($\cos\Phi_k \cos\Lambda_k$; $\cos\Phi_k \sin\Lambda_k$; $\sin\Phi_k$). Behelyettesítve a képletbe, a transzformáció mátrixa:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & \alpha\sin\Phi_k & -\alpha\cos\Phi_k\sin\Lambda_k \\ -\alpha\sin\Phi_k & 1 & \alpha\cos\Phi_k\cos\Lambda_k \\ \alpha\cos\Phi_k\sin\Lambda_k & -\alpha\cos\Phi_k\cos\Lambda_k & 1 \end{pmatrix}$$

A 3. lépéshez az alapvonal mérési hibáját a legkisebb négyzetek módszerével becsüljük. A 3. táblázatban kiszámoltam második geodéziai főfeladat segítségével (újfent a geographiclib programot használva) az egyes pontok egymástól mért távolságát WGS84-ellipszoidon. Ugyanezt megtettem a marosvásárhelyi koordinátákat a régi Gauss-gömbre visszavetítve, ahol az oldalkoszinusztétel adja a távolságot. A viszonylag csekély távolságok miatt a Gauss-gömb ellipszoidra vonatkozó redukciói elhanyagolhatók.

A két alapfelületen számított távolságok között szabályos hiba mutatható ki, így feltételezhetjük, hogy az alapvonal hosszát túl rövidnek mérték.

Táblázat 3. A pontok távolsága a régi Gauss-gömbön ill. WGS84-ellipszoidon

Végpontok		Gauss-gömb (m)	WGS84 (m)	Eltérés (ppm)
Kesztej-hegy	**Tiglamor**	25959,125	25961,505	+91,697
Kesztej-hegy	**Varatik**	157490,844	157493,390	+16,164
Kesztej-hegy	**Magura-Korbest**	168434,827	168436,926	+12,462
Kesztej-hegy	**Pless**	169670,920	169672,038	+6,592
Tiglamor	**Varatik**	136369,683	136371,395	+12,558
Tiglamor	**Magura-Korbest**	150287,410	150289,181	+11,781
Tiglamor	**Pless**	156965,996	156967,519	+9,703
Varatik	**Magura-Korbest**	29621,964	29622,047	+2,283
Varatik	**Pless**	69312,236	69312,232	–0,065
Magura-Korbest	**Pless**	42388,203	42388,156	–1,089

Keressük tehát azt a σ nagyítási tényezőt, amelyre:

$$\sum\left[(1+\sigma)t_g - t_w\right]^2 \rightarrow \min$$

t_g a Gauss-gömbi, t_w a WGS84-ellipszoidi távolságot jelöli. A fönti kifejezés csak akkor lehet minimális, ha σ szerinti deriváltja zérus, amelyből átrendezés után:

$$\sigma = \frac{\sum t_g t_w}{\sum t_g^2} - 1 = +11{,}190\,\text{ppm}$$

Fontos megállapítani, hogy igazán jelentős hatása a vízszintes koordinátákra a 2. lépésnek van. A 3. lépés a Kesztej-hegytől távol is csak kb. 2-4 méteres korrekciót okoz, így a cikkben megfogalmazott pontossági elvárások mellett akár figyelmen kívül is hagyhattuk volna. Ezzel együtt a szelvények illeszkedésén a korrekció inkább javított, mint rontott.

Fontos megjegyezni, hogy a 4. lépés eltolását követően az új origó nem egyezik meg a Bessel-ellipszoid középpontjával, hiszen az a 2. és 3. lépések során kissé áthelyeződött.

Jelölje a nagyítás mértékét σ, a Kesztej-hegy térbeli derékszögű koordinátáit a Bessel-ellipszoidon x_k; y_k; z_k, ekkor a következő transzformációt kapjuk:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = (1+\sigma)F\left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} dx_m \\ dy_m \\ dz_m \end{pmatrix}$$

Vagy átalakítva:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx_m \\ dy_m \\ dz_m \end{pmatrix} - \left[(1+\sigma)F - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix} + (1+\sigma)F \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

A legtöbb térinformatikai programban nem áll rendelkezésre ilyen átszámítás, hanem az ún. Burša–Wolf-transzformáció paraméterezhető:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} + (1+s) \begin{pmatrix} 1 & ez & -ey \\ -ez & 1 & ex \\ ey & -ex & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Azonban látható, hogy a két transzformáció tökéletesen egyenlővé tehető. Ehhez a nagyítás értékét változatlanul hagyhatjuk. Az elforgatási értékek megegyeznek az F mátrix megfelelő elemeivel. Az eltolási értékeket pedig megkapjuk, ha a Mologyenszkij-transzformáció eltolásaiból kivonjuk az utána álló korrekciós vektor (szögletes zárójelben lévő mátrix és a Kesztejhegy koordinátáinak szorzata) megfelelő elemét. Ekkor kifejezve x_k; y_k; z_k-t Φ_k; Λ_k függvényében, majd egyszerűsítve:

$$dx = dx_m - N(\Phi_k)\cos\Phi_k \left[\alpha(1+\sigma)e^2 \sin\Phi_k \sin\Lambda_k + \sigma\cos\Lambda_k \right]$$

$$dy = dy_m + N(\Phi_k)\cos\Phi_k \left[\alpha(1+\sigma)e^2 \sin\Phi_k \cos\Lambda_k - \sigma\sin\Lambda_k \right]$$

$$dz = dz_m - \sigma(1-e^2)N(\Phi_k)\sin\Phi_k$$

$$ex = \alpha\cos\Phi_k\cos\Lambda_k$$

$$ey = \alpha\cos\Phi_k\sin\Lambda_k$$

$$ez = \alpha\sin\Phi_k$$

$$s = \sigma$$

Fontos kiemelni, hogy fenti képletekben N és e^2 a Bessel-ellipszoidra vonatkozik, míg α radiánban helyettesítendő a képletbe. A levezetés során a koordináta-rendszert forgattuk el, azonban néhány szoftver (pl. a QGIS) a helyvektor koordinátáit forgatja el. Ez esetben (mint például a dolgozat végén közölt ún. PROJ string esetén) a három elforgatás előjele megfordítandó.

Az itt olvasható képletek kissé eltérnek Timár és Molnár (2013) jegyzetében található hasonló transzformációtól. Az eltérés oka, hogy Timár és Molnár nem az ellipszoid normálisát, hanem az ellipszoid középpontján és a felületi ponton átmenő egyenest vette forgástengelynek. Végül a kapott paraméterek: dx = 543,31 m; dy = −181,68 m; dz = 528,67 m; ex = 22,402″; ey = 10,159″; ez = 25,967″; s = 11,190 ppm

Megjegyezzük, hogy legalább három illesztőpont esetén elméletileg lehetőség lett volna a Burša–Wolf-paramétereket legkisebb négyzetek módszere szerinti kiegyenlítéssel is számolni. Ehhez Timár és Molnár (2013) jegyzetének függelékében találunk levezetést. Fokozottan felhívnám az olvasó figyelmét azonban, hogy a képleteket körültekintően használja! Timár és Molnár (19) sorszámú egyenletét újra levezetve ugyanis kiderül, hogy az együtthatómátrix főátlójában az első három elem előjelei tévesek, ezen felül még fölcserélődött a mátrix 3. sorában a 6-7. oszlop, továbbá a 6-7. sor a 3. oszlopban. Ezzel a módszerrel (immár a javított együtthatómátrixszal) számítva a következő paraméterezést kapnánk: dx = 523,29 m; dy = 99,04 m; dz = 379,77 m; ex = 5,241″; ey = 8,597″; ez = 21,280″; s = 17,534 ppm

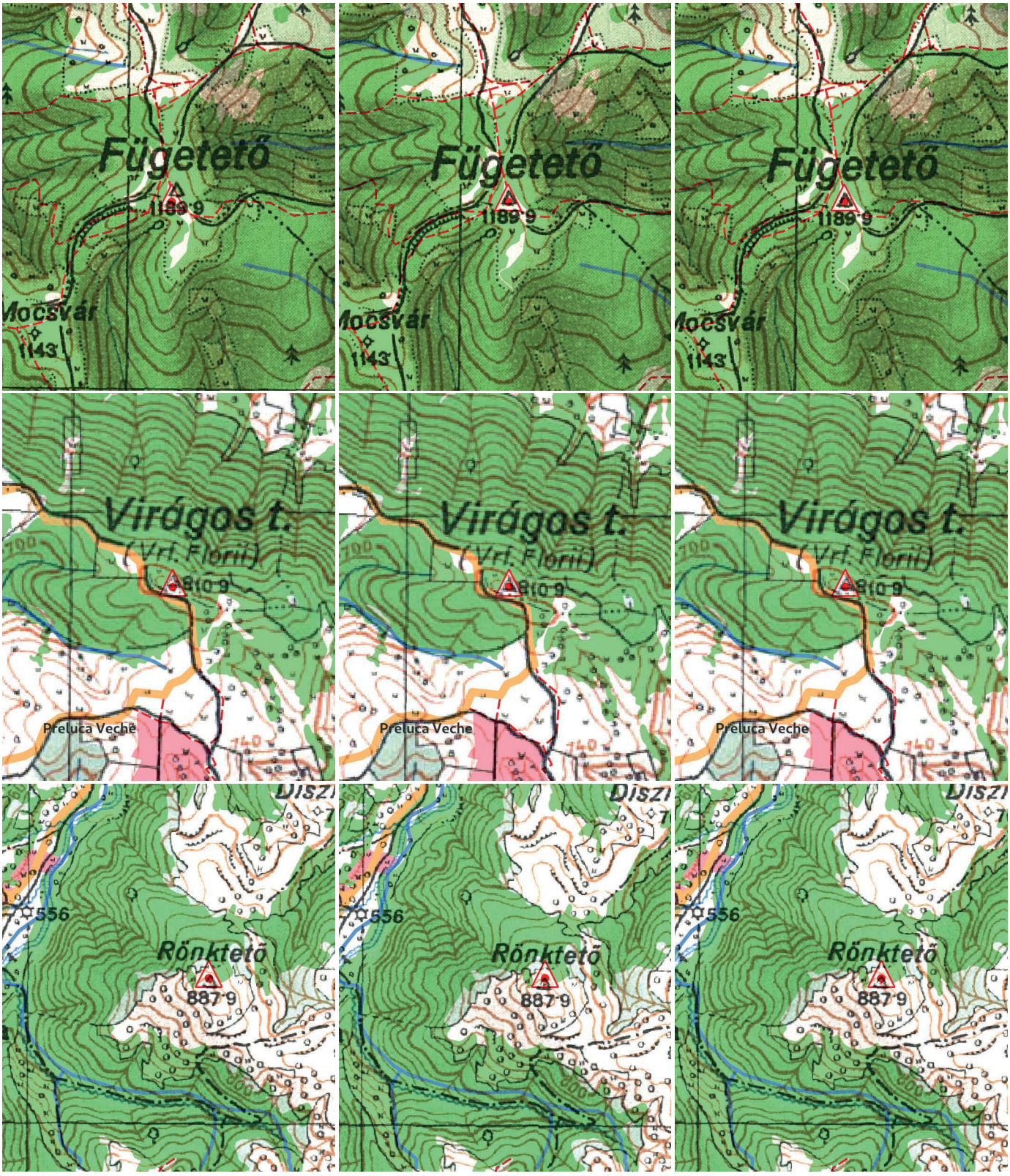
Meg kell ugyanakkor jegyeznünk, hogy egy kiegyenlítő számítás érvényessége nagy mértékben függ a fölhasznált pontok elhelyezkedésétől. Sajnos az öt kiválasztott pont semmiképp sem tekinthető Erdély területére nézve reprezentatívnak: Kettő pont a középső területen, három pont pedig Erdélytől nyugatra, a Partium északi és középső részein található. Ennek megfelelően a kiegyenlítésből számított paraméterek bár várhatóan jobb illeszkedést biztosítanak az érintett Kolozs és Torda-Maros vármegyékben, az ettől távol eső területeken a transzformáció romlását várhatjuk a dolgozatban levezetett determinisztikus modellhez képest.

A bemutatott determinisztikus és kiegyenlítő számítás vízszintes értelmű eltérése tapasztalataim szerint a kettő-öt métert Erdély területén nem haladta meg (a fölhasznált illesztőpontok környezetében még méteres eltérést sem tapasztaltam). Mivel az eltérés így a rendelkezésemre álló ötvenezres méretarányú szelvények rajzi hibája alatt maradt, nincs érdemi lehetőségem a két módszer hatékonyságának gyakorlati összehasonlítására. Jó lenne idővel nagyobb pontosságú, pl. kataszteri térképek segítségével ellenőrizni, hogy a kiegyenlítésből vagy a determinisztikus számításból levezetett paraméterek-e a megfelelőbbek a kiegyenlítésben fölhasznált pontoktól távol, például Háromszékben vagy Hunyadban.

4. Ellenőrzés

Az előbbi levezetés alapján a következő PROJ-definíció adja meg a Marosvásárhelyi katonai sztereografikus rendszert: `+proj=sterea +lat_0=46d33'6.4273" +lon_0=24d23'34.9350" +k=1 +x_0=600000 +y_0=600000 +ellps=bessel +towgs84=543.31,-181.68,528.67,-22.402,-10.159,-25.967,11.190 +units=m +no_defs` Az újabb szoftvercsomagokban szükséges WKT-definíciót az olvasó a függelékben találja. Megjegyezzük, hogy a kettős leképezésű sztereografikus vetület bár valamennyi térinformatikai szoftverben elérhető, a szögtartó gömbvetület mindig a segédpólus szélességén lesz hossztartó (Timár–Molnár–Márta 2003). Mint a bevezetőben láttuk, történeti okokból a Gauss-gömb normálparalelköre a valóságban a segédpólustól délre halad át, azonban szerencsénkre ez az eltérés csupán kb. húsz szögmásodperc. Ennek hatása bizonyosan elenyésző, hiszen az EOV esetén még másfél szögperc eltérés is szubmilliméteres nagyságrendű vízszintes hibát okozott (Tóth 2022).

Ezekkel a paraméterekkel, egyszerű Helmert-transzformációval georeferáltam a szelvényeket, illesztőpontokként a koordinátahálózati vonalak metszéspontjait alkalmazva. A térképet az ANCPI honlapjáról ingyenesen letölthető TopRo50 adatbázissal vetettem össze. Az illeszkedés pontosságát a fölhasznált illesztőpontoktól távol, olyan uralgó magaslatokon ellenőriztem, ahol a józan ész alapján valószínűsíthető, hogy a térkép készítésekor már volt háromszögelési pont (néhány példa az 1. ábrán). Néhány kiugróan hibás (Kalotaszeg nyugati részén található) pontot



1. ábra Marosvásárhelyi sztereografikus szelvények illeszkedése rendre Timár et al. (2007), Kerkovits és Gede (2023) és jelen tanulmány paramétereivel. Az élénk színű vonalak a modern TopRo50 adatbázisból származnak. Az Alcsíkban található Füge-tető példája mutatja, hogy az illeszkedés a legjobban a Székelyföld területén javult. A kővárvidéki Virágos-tetőn a 2023-as paraméterekhez képest már nem történt javulás, de romlás sem; míg a kalotaszegi Rönk-tető esetén a 2023-as cikk rontott Timárhoz képest, jelen tanulmány eredményei azonban már itt is kedvezőbbek. Az eredetileg 1 : 50 000 méretarányú térképek 1 : 25 000-re lettek nagyítva.

leszámítva az illeszkedés feltűnően pontos volt. Meglepő módon a felhasznált illesztőpontokhoz képest átellenesen fekvő Háromszék környékén tapasztaltam a Kesztej-hegy közvetlen környéke után a második legjobb illeszkedést. Ez alátámasztja a determinisztikus modell előnyét, hiszen ennek pontossága nem az illesztőpontok helyzetétől, hanem kizárólag a korabeli mérések pontosságától függ. A korábbi tanulmányban (Kerkovits–Gede 2023) elért kb. 15 méteres hiba 3-8 méterre javult. Ez a térkép méretarányában 0,1 mm, azaz a legnagyobb elérhető nyomdai pontosság!

Ennél nagyobb pontosságot azonban nem várhatunk a transzformációtól, mert az a levezetés jellege miatt csak a Kesztej-hegy környezetében pontos, attól távolodva fokozatosan romlik. A Kesztej-hegytől legtávolabb található Pless pont ETRS89-koordinátáit Marosvásárhelyi rendszerbe transzformálva már kellemetlen, 10 méter körüli hibával kapjuk vissza. Ennek oka a korabeli háromszöghálózat mérési hibáiban keresendő, így jobban illeszkedő, a hálózat belső torzulásait figyelembe vevő módszerrel kaphatunk csak pontosabb eredményt. Ehhez viszont több, *Erdély teljes területét reprezentáló* alappont koordinátái lennének szükségesek. Ugyanakkor igen kevés pont felhasználásával is sikerült a topográfiai térképek méretarányának megfelelő pontosságú transzformáció létrehozása.

5. Záró gondolat

A dolgozatban bemutatott módszer alkalmazhatóságát leginkább Erdély illesztőpontjainkhoz képest átellenes részein, a Kesztej-hegytől távol lehetne ellenőrizni. Kísérletképpen megpróbáltam a Fogarasi-havasok térségét ábrázoló szelvényeket georeferálni. Ezek III. katonai felmérésből származó lapok voltak, amelyeket marosvásárhelyi sztereografikus koordinátákkal nyomtak felül. Látható volt, hogy a hagyományos, kiegyenlítő számításból származó értékek és a jelen munka paraméterei között várakozásainknak megfelelően itt adódott a legnagyobb eltérés. Azonban a térképek rajzi hibája sajnos olyan nagy mértékű volt, hogy lehetetlen objektív módon megmondani, hogy az egymástól akár 20 méteres nagyságrendben eltérő transzformációk közül melyik adja a jobb illeszkedést. Ha hozzájuthatnék erdélyi területről származó kataszteri térképekhez, azok illeszkedése erősebb bizonyítékot szolgáltathatna a módszertan helyességére.

Köszönetnyilvánítás

A georeferálás ellenőrzéséhez és az alappontok mai Stereo70-rendszerű koordinátáihoz a TopRo50 adatbázist használtam föl, amelyt az ANCPI a http://geoportal.ancpi.ro/portal/sharing/rest/content/items/94ebfdce60b34da7958216b1558e781d/data címen elérhető licenszszerződés alapján díjmentesen bocsátott rendelkezésemre.

Irodalomjegyzék

Biró Péter – Ádám József – Völgyesi Lajos – Tóth Gyula. 2013. *A felsőgeodézia elmélete és* gyakorlata. HM Zrínyi, Budapest. ISBN: 978-963-257-248-2

Fasching Antal. 1909. A magyar országos háromszögelések és részletes felmérések új vetületi rendszere. Pénzügyminisztérium, Budapest

Gauß, C. F. 1843. Erste Abhandlung. In Untersuchungen über Gegenstände der Höheren Geodäsie, Wilhelm Engelmann, Leipzig, pp. 3–35.

Homoródi Lajos. 1952. Vizsgálatok új háromszögelési hálózatunk elhelyezésére és tájékozására. Geodézia és kartográfia, 4. évf. 1. sz. pp. 1–10.

Homoródi Lajos. 1953. Régi háromszögelési hálózataink elhelyezése és tájékozása, Geodézia és Kartográfia, 5. évf. 1. sz. pp. 1–18.

Ihde, J. – Sánchez, L. 2005. A unified global height reference system as a basis for IGGOS. Journal of Geodynamics, 40. évf. 4–5. sz. pp. 400–413. DOI: 10.1016/j.jog.2005.06.015.

Karney, C. F. F. 2013. Algorithms for geodesics. Journal of Geodesy, 87. évf. 1. sz. pp. 43–55. DOI: 10.1007/s00190-012-0578-z

Kerkovits K. – Gede M. 2023. Parametrization of the Hungarian Stereographic Map Sheets. Advances in Cartography and GIScience of the ICA, 4. köt. p. 13. DOI: 10.5194/ica-adv-4-13-2023

Kovács Emőd. 2011. Komputergrafika – Matematikai alapok. Eszterházy Károly Főiskola, Eger.

Oltay Károly. 1914. A függővonal deviatiója Kesztej és Tigla-morutului pontok között. Mathematikai és Természettudományi Értesítő, 32. évf. pp. 523–530.

Timár Gábor. 2007. A ferrói kezdőmeridián. Geodézia és Kartográfia, 59. évf. 12. sz. pp. 3–7.

Timár Gábor – Molnár Gábor. 2013. Térképi vetületek és alapfelületek. Eötvös Loránd Tudományegyetem, Budapest. ISBN: 978-963-284-387-2

Timár G. – Molnár G. – Imecs Z. – Păunescu, C. 2007. Datum and projection parameters for the Transylvanian sheets of the 2nd and 3rd Military Surveys. Geographia Technica, 2. évf. 1. sz. pp. 83–88.

Timár Gábor – Molnár Gábor – Márta Gergely. 2003. A budapesti sztereografikus, illetve a régi magyarországi hengervetületek és geodéziai dátumaik paraméterezése a térinformatikai gyakorlat számára. Geodézia és Kartográfia, 55. évf. 3. sz. pp. 16–21.

Timár Gábor – Molnár Gábor – Păunescu, Cornel – Pendea, Florin. 2004. A második és harmadik katonai felmérés erdélyi szelvényeinek vetületi és dátumparaméterei. Geodézia és Kartográfia, 56. évf. 5. sz. pp. 12–16.

Tóth Sándor. 2022. Az EOV vetületi egyenletében szereplő k1 állandó helyes értéke. Geodézia és Kartográfia, 74. évf. 5. sz. pp. 20–26. DOI: 10.30921/GK.74.2022.5.3

Varga József. 2003. Vetülettan. 3. kiadás. Műegyetemi Kiadó, Budapest. Jegyzet azonosítója: 91244

Függelék: Javasolt WKT-definíció a Marosvásárhelyi katonai sztereografikus rendszerhez

```
BOUNDCRS[
    SOURCECRS[
        PROJCRS["Marosvásárhely Stereographic",
            BASEGEOGCRS["KD 1890",
                DATUM["Kesztej Datum 1890",
                    ELLIPSOID["Bessel 1841",6377397.155,299.1528128,
                        LENGTHUNIT["metre",1,
                            ID["EPSG",9001]]]],
                PRIMEM["Greenwich",0,
                    ANGLEUNIT["degree",0.0174532925199433],
                    ID["EPSG",8901]]],
            CONVERSION["Marosvásárhely Stereographic",
                METHOD["Oblique Stereographic",
                    ID["EPSG",9809]],
                PARAMETER["Latitude of natural origin",46.5517853611111,
                    ANGLEUNIT["degree",0.0174532925199433],
                    ID["EPSG",8801]],
                PARAMETER["Longitude of natural origin",24.3930375,
                    ANGLEUNIT["degree",0.0174532925199433],
                    ID["EPSG",8802]],
                PARAMETER["Scale factor at natural origin",1,
                    SCALEUNIT["unity",1],
                    ID["EPSG",8805]],
                PARAMETER["False easting",600000,
                    LENGTHUNIT["metre",1],
                    ID["EPSG",8806]],
                PARAMETER["False northing",600000,
                    LENGTHUNIT["metre",1],
                    ID["EPSG",8807]]],
            CS[Cartesian,2],
                AXIS["easting (Y)",east,
                    ORDER[1],
                    LENGTHUNIT["metre",1,
                        ID["EPSG",9001]]],
                AXIS["northing (X)",north,
                    ORDER[2],
                    LENGTHUNIT["metre",1,
                        ID["EPSG",9001]]]]],
    TARGETCRS[
        GEOGCRS["WGS 84",
            DATUM["World Geodetic System 1984",
                ELLIPSOID["WGS 84",6378137,298.257223563,
                    LENGTHUNIT["metre",1]]],
            PRIMEM["Greenwich",0,
                ANGLEUNIT["degree",0.0174532925199433]],
            CS[ellipsoidal,2],
                AXIS["latitude",north,
                    ORDER[1],
                    ANGLEUNIT["degree",0.0174532925199433]],
                AXIS["longitude",east,
                    ORDER[2],
                    ANGLEUNIT["degree",0.0174532925199433]],
            ID["EPSG",4326]]],
    ABRIDGEDTRANSFORMATION["Transformation from KD1890 to WGS84",
        METHOD["Position Vector transformation (geog2D domain)",
            ID["EPSG",9606]],
        PARAMETER["X-axis translation",543.31,
            ID["EPSG",8605]],
        PARAMETER["Y-axis translation",-181.68,
            ID["EPSG",8606]],
        PARAMETER["Z-axis translation",528.67,
            ID["EPSG",8607]],
        PARAMETER["X-axis rotation",-22.402,
            ID["EPSG",8608]],
        PARAMETER["Y-axis rotation",-10.159,
            ID["EPSG",8609]],
        PARAMETER["Z-axis rotation",-25.967,
            ID["EPSG",8610]],
        PARAMETER["Scale difference",1.000011190,
            ID["EPSG",8611]]]]
```