

A Balaton nívófelületének modellje – Eötvös Loránd mérései alapján

GILÁNYI Gibárt¹, MOLNÁR Gábor Péter²

¹Óbudai Egyetem, Alkalmazott Informatikai és Alkalmazott Matematikai Doktori Iskola

²Óbudai Egyetem, Alba Regia Kar, Geoinformatikai Intézet

E-mail: gilanyi.gibart@stud.uni-obuda.hu

[DOI: 10.30921/GK.78.2026.1.1](https://doi.org/10.30921/GK.78.2026.1.1)

Absztrakt

Eötvös a torzióssingával végzett méréseket bemutató publikációban a nehézségi potenciált másodfokú Taylor-sorfejtéssel modellezi, és bemutatja, hogy a nehézségi potenciál második deriváltjai (pontosabban azok bizonyos kombinációi) közvetlenül mérhetők a műszerével. A szerzők továbbfejlesztették Eötvös nehézségi potenciálmodelljét magasabb fokú tagok bevonásával a Taylor-sorba, felhasználva a nehézségi potenciál magasabb rendű deriváltjait (együtthatóit) és a topocentrikus derékszögű koordináták magasabb hatványait. Ezen eljárás alkalmazása lehetővé tette a nehézségi potenciálmodell kiterjesztését egy mezoskálájú területre, ezáltal nagyobb számú torzióssingamérés bevonását a modellezésbe. Annak érdekében, hogy a nehézségi potenciál kielégítse a Laplace-Poisson-egyenletet, kényszerfeltételeket kell alkalmazni a modell paramétereire. A továbbfejlesztett potenciálmodell paramétereinek (együtthatóinak) becslése az Eötvös és munkatársai által 1901 telén, a Balaton jegén végzett torzióssingamérések felhasználásával történt. A modell együtthatóit a (torziós ingával) mért és a számított nehézségi potenciál második deriváltjai közötti különbségek négyzetösszegének minimalizálásával becsültük.

Az eredményül kapott nehézségi erőteret – Eötvös munkáihoz hasonlóan – kétféle térképen mutatjuk be. Az egyik térképtípus szintvonalakkal jeleníti meg a helyi geoidundulációt, amelyen a szintfelület görbületének jellemzésére az Eötvös által definiált, mért és számított „horizontális irányítóképesség” értékeit is feltüntettük. A második típus az izogammatérkép, amely a szintfelületen érvényesülő nehézségi gyorsulást mutatja. A levezetett modell jellemzi a nehézségi potenciált a mérésekkel lefedett területen, az azon kívüli területeken azonban váratlan viselkedést mutat és hamis anomáliákat generál. A területre vonatkozó korábbi geoidmodellek is tartalmaztak torzióssinga-adatokat; ezzel szemben eredményeink egy szűkebb területre vonatkozó, részletesebb nehézségi potenciálmodellt szolgáltatnak.

Abstract

In the publication presenting measurements with the torsion balance, Eötvös models the gravity potential using a second-degree Taylor series expansion and demonstrates that the second derivatives of the gravity potential (or specifically certain combinations of them) are directly measurable with his instrument. The authors improved Eötvös' gravity potential model by incorporating higher-degree terms into the Taylor series expansion, utilizing higher-order derivatives (coefficients) and higher powers of topocentric Cartesian coordinates. This application allowed the extension of the gravity potential model to a mesoscale area, encompassing a larger number of torsion balance measurements. To ensure the gravity potential satisfies the Laplace-Poisson equation, constraints must be applied to the model parameters. The estimation of the parameters (coefficients) for the improved potential model was conducted using torsion balance measurements by Eötvös and his colleagues on the ice of Lake Balaton in the winter of 1901. The coefficients were determined by minimizing the sum of squares of the differences between the measured (by torsion balance) and calculated second derivatives of gravity potential.

The resulting gravity potential field is presented on two types of map, similarly to Eötvös' work. One map type displays local geoid undulation with contour lines, also indicating the values of the measured and calculated Horizontal Directing Tendency, defined by Eötvös to characterize the curvature of the level surface. The second type is the isogamma map, which shows the gravity acceleration on the level surface. The derived model characterizes the gravity potential for the region where measurements were taken, yet it behaves unexpectedly and generates artifacts (false anomalies) beyond this area. Earlier geoid models for this region included torsion balance data; in contrast, our results provide a more detailed gravity potential model over a more confined area.

1. Bevezetés

1.1. A globális gravitációs elméletek fejlődése

Az újkorban a Föld alakjának egyre pontosabb megismerését a természeti jelenségeket leíró elmélet (a fizika és matematika) valamint a gyakorlatban rendelkezésre álló mérési technikák kölcsönös egymásra hatása és fejlődése tette lehetővé.

Newton (1687) gravitációs erőtvényéből kiindulva Laplace (1825) igazolta, hogy a newtoni gravitációs gyorsulás (ami a tér minden pontjában egy vektor) egy skalárfüggvény – nevezetesen a potenciál – gradienseként állítható elő. Későbbi eredményei a nevét viselő Laplace-egyenlet megfogalmazásához vezettek, amely kimondja, hogy tömegmentes térrészben a potenciálfüggvény második parciális deriváltjainak összege zérus.

A földi ellipszoid méretének meghatározására szolgáló, a különböző kontinenseken végzett csillagászati mérések és háromszögelések eltérő ellipszoidparamétereket eredményeztek, és ezen ellentmondások tisztázásának igénye vezetett a geoid fogalmának bevezetéséhez (Listing, 1872). A geoid kapcsolja össze a geodéziát és a geofizikát: a geoid egy olyan felület, ahol a nehézségi potenciál értéke állandó. A geoidnak az ellipszoidtól való függőleges eltéréseinek helyről helyre történő meghatározása vált a geodézia legfőbb kihívásává a 19. század második fele óta.

A geoid fizikai módszerekkel történő meghatározásának alapját Stokes (1849) vezette le, a módszer a felszíni nehézségi gyorsulásoknak egy magfüggvény (ún. kernel-függvény) szerinti integrálását igényli a teljes Földfelszínre kiterjedően egyetlen kijelölt pont geoidundulációjának levezetéséhez. A felszíni nehézségi gyorsulás mérések ritka és egyenetlen térbeli eloszlása miatt a gyakorlati alkalmazás azonban sokáig kivitelezhetetlennek tűnt. A XX. század első felében Vening Meinesz (1925) innovációja, a tengeralattjárókon alkalmazott kettős inga lehetővé tette a tengereken történő gyorsulásmérést, a rugós graviméterek elterjedése felgyorsította a szárazföldi adatgyűjtést (LaCoste & Romberg, 1941). Ezen adatok felhasználásával, a Stokes-integrál konvolúcióval történő numerikus közelítése révén születtek meg az első regionális geoidtérképek Zhongolovich (1952) és Heiskanen (1957) munkája nyomán.

A geoidunduláció geodéziai mérésekkel történő meghatározásához Helmert (1910) alternatív megközelítést javasolt: a függővonal-elhajlások egy menetvonal menti integrálását, vagyis a csillagászati szintezést. Bár ez a klasszikus geodéziai eljárásokon (háromszögelésen és csillagászati helymeghatározáson) alapuló módszer rendkívül munkaigényesnek ígérkezett, pontosabb eredményekkel kecsegtetett.

1906-ban, Eötvös torziós ingával elért eredményeinek megismerése után Helmert felismerte, hogy az ingamérések

felhasználhatók a potenciálfelület görbületeinek meghatározására, amelyek közvetlen kapcsolatban állnak a geoidundulációval (Helmert, 1910). Az egyre növekvő számú ingamérés ellenére sem valósulhatott meg ez az elképzelés (Haalck, 1950), mivel még a 20. század közepén is hiányzott a megfelelő matematikai modell és a szükséges számítási kapacitás.

A geoid matematikai modellje a Laplace-egyenlet gömbi koordinátákban történő megoldásából származó gömbfüggvény-sorfejtés, amely növekvő fokú és rendű együtthatók és magfüggvények szorzatainak összegéből áll. A modell alkalmazására Jeffreys (1929) átfogó tanulmánya mutatott példát, ahol az alacsony fokszámú együtthatókat felszíni mérésekből becsülték. A modellben rejlő lehetőségek akkor teljessé váltak ki, amikor Buchar (1958) úttörő módon műholdpálya-megfigyelésekből vezette le a gömbfüggvény-együtthatókat. A műholdas pályamefigyelések váltak az együtthatók meghatározásának elsődleges forrásává, majd a műholdas és földi gravitációs adatok Cook (1958) általi egyesítése teremtette meg a geoidmodellek pontosításának standard módszertanát, elérve a 360-as fokszámot (pl. EGM96 (Lemoine et al., 1998)). A mérés-technika fejlődése, különösen a GOCE műhold gravitációs gradiométereinek alkalmazása Jaggi és társai (2010) révén az EGM2008 modellben (Pavlis et al., 2012) a sorfejtés már a 2160-as fokszámig terjed. Bár az együtthatók száma a technika jelenlegi csúcspontját jelenti, regionális alkalmazásokhoz – például a terepi geodéziában és a GNSS mérésekben szükséges geoidmagasságok meghatározásához – még ez a pontosság sem mindig elegendő.

1.2. Magyarországi geoidmodellek

Mivel még a 2160-as fokszámú globális geoidmodellek sem biztosítják a terepi geodézia számára szükséges térbeli felbontást – nevezetesen a GNSS-alapú ellipszoidi magasságok szintezett magassággá történő átszámítását –, regionális geoidmodellek és geoidundulációs adatbázisok fejlesztésére volt szükség. Ezek a modellek univerzális módszertanok helyi földi adatokra történő adaptálásával jöttek létre, döntően regionális, vagy nemzeti igényeket kielégítve.

A regionális geoidmodellek szerkesztési módszertanának fejlődése jól követhető az adott felmérési területen alkalmazott modellek történeti alakulásán keresztül. Magyarország korai regionális geoidmodelljét Kenyeres (1993) dolgozta ki, szintezési és GPS mérési adatokat kombinálva a nagyfrekvenciás tagok számítására. A magyarországi kvázigeoid-modellt gravitációs adatok, GPS/szintezés és függővonal-elhajlások integrálásával, a legkisebb négyzetek kollokációs (LSC) módszerének alkalmazásával állították elő (Tóth & Szűcs, 2011) (Moritz, 1980).

A Magyarországon rendelkezésre álló nagy mennyiségű torziósinga-mérés számos kutatót ösztönzött arra, hogy a meglévő módszertanokat ezen adatokra is alkalmazzák (Szafián et al., 2006). A regionális nehézségi potenciálfüggvényt Dobróka (2008) geofizikai inverziós technikák segítségével rekonstruálta, míg Völgyesi (2012) (2015) a nehézségi erő függőleges

gradiensét határozta meg egy kijelölt teszterületen a torziósingamérések sorfejtéses modelljével. A kollokációs módszer és egyéb analitikus technikák torziósinga-adatokra történő alkalmazása vezetett a HGTUB2007 magyarországi geoidmodell megalkotásához (Tóth, 2009).

A gömbfüggvény-reprezentáció egyszerűsítésén alapuló alternatív módszereket – mint a Schmidt-féle gömbi bázisfüggvényeket alkalmazó modell (Schmidt et al., 2007) vagy a Bölling és Grafarend (2005) által továbbfejlesztett ellipszoidi spektrális modell – Tóth (2003) alkalmazta torziósinga-adatokra egy peremérték-feladatra fókuszáló megközelítésben. Továbbá a felfelé/lefelé folytatás módszere tette lehetővé a GOCE műhold gravitációs gradiens méréseinek integrálását a regionális geoidmodellekbe (Tóth et al., 2006).

1.3. Kutatási terület: a Balaton

A Balaton összehangolt tudományos vizsgálatát a Magyar Földrajzi Társaság Balaton Bizottsága kezdeményezte 1891-ben. A kutatók részletesen feltárták a tó és környezetének földtani, fizikai, kémiai és biológiai jellemzőit. Eredményeiket a Lóczy Lajos (1911) által szerkesztett „A Balaton tudományos tanulmányozásának eredményei” című monográfiában foglalták össze magyar és német nyelven.

A tudományos program kezdetén, 1901 telén Eötvös Loránd torziósingaméréseket végzett a tó jegén (Eötvös, 1908). A jégpáncél biztosította, hogy a mérések egy egységes nivófelületen történjenek. A partoktól távol eső pontokon a topográfiai hatások elhanyagolhatóak voltak, így az észlelt anomáliák kizárólag a felszín alatti sűrűségváltozásoknak voltak tulajdoníthatók.

1941-ben, egy szénhidrogén-kutatási program keretében végzett kiterjedt geofizikai kampány során újabb torziósingamérésekre került sor (Raul, 1941), amelyek megerősítették Eötvös feltételezését a Balaton alatt húzódó, északkelet–délnyugati irányú eltemetett hátságról.

A Balaton légi lézerszkennelése (LiDAR) során végzett kutatás bizonyította, hogy a tó vízfelszíne a helyi geoid egy szegmensének tekinthető. A szkennelési adatok pontos feldolgozásához elengedhetetlen volt az ETRS89 vonatkoztatási rendszerhez viszonyított geoidunduláció figyelembevétele (Zlinszky et al., 2014) az az így kapott geoidszegmens jó egyezést mutatott a HGTUB2007 regionális geoidmodellel (Tóth, 2009).

2. Módszerek

2.1. A Laplace–Poisson-egyenlet Descartes-féle koordinátákkal

A Laplace-egyenlet egy olyan parciális differenciálegyenlet, amely számos fizikai jelenséget modellez; többek között a nehézségi potenciált leíró egyenletként szolgál.

Laplace megvizsgálta a newtoni tömegvonzás törvényét, a $\mathbf{g} \sim -1/r^2$ formában leírt erőtvénnyt. Ez kimondja, hogy a koordináta-rendszer origójába elhelyezett tömeg által keltett gravitációs gyorsulás a tér egy adott pontjában úgy írható le, mint egy olyan vektor, aminek iránya az adott pontból a koordináta-rendszer origója fele mutat, és nagysága arányos a pontnak az origótól mért távolsága négyzetének a reciprokával.

Laplace ezt a térerősségvektort vizsgálva észrevette, hogy a térerősségvektor a tér bármelyik pontjában előállítható úgy, mint egy skalárfüggvénynek a térkoordináták szerinti parciális deriváltjaiból képzett vektor. Ezt a skalárfüggvényt potenciálnak nevezzük, amelyet a gravitációs potenciál esetén V -vel jelöljük. (Ádám et al., 2013)

Egy másik észrevételt is tett: ennek a skalárfüggvénynek a Descartes féle térkoordináták szerinti második deriváltjainak összege nulla minden olyan pontban, ahol nem találhatóak tömegek. Ennek az utóbbi összefüggésnek a kifejezése a Laplace differenciálegyenlet:

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) = 0 \quad (1)$$

Ezt a megállapítást később Poisson egészítette ki azzal, hogy ahol tömegek vannak jelen, ott az egyenlet jobb oldalán egy, az anyag sűrűségét (ρ) tartalmazó tag jelenne meg. A Földön a nehézségi erő a newtoni gravitációs erő és a Föld forgása által okozott centrifugális erő összege. A Föld felszínén (a levegőben, a tömegeken kívül) a W -vel jelölt nehézségi potenciálra (Ádám et al., 2013) vonatkozó Poisson-egyenlet a következő:

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}\right) = 2\omega^2, \quad (2)$$

ahol ω a Föld forgási szögsebessége.

2.2. A nehézségi potenciál Taylor-sorfejtése

Ahhoz, hogy a nehézségi potenciált egy felszíni pontban, Descartes-féle koordinátákban Taylor-sorba fejtsük, rögzítenünk kell egy helyi topocentrikus koordináta-rendszert. Ebben a rendszerben az x tengely kelet felé, az y tengely csillagászati észak felé, a z tengely pedig felfelé (a helyi függőleges irányába) mutat, a koordináta-rendszer origója pedig a referenciapontunkban helyezkedik el. A 3. egyenlet mutatja be a nehézségi erőtér potenciáljának Taylor-sorfejtéses alakját.

A 3. egyenletben a potenciál parciális deriváltjai a referenciapontbeli értékek. A Taylor-sorfejtés nulladfokú tagja, U_0 , a koordináta-rendszer origójában érvényes potenciálérték. Az elsőfokú tagokat a negatív nehézségi gyorsulásvektor komponensei ($-\mathbf{g}$) és a helyvektor ($\mathbf{r} = [x, y, z]$) komponenseinek szorzata alkotja. A másodfokú tagok – amint azt később látni fogjuk – az Eötvös-tenzor elemei megszorozva a helyvektor koordinátáinak második hatványaival.

$$\begin{aligned}
 W(x, y, z) = & W_0 + \\
 & + \left(\frac{\partial W}{\partial x} \cdot x + \frac{\partial W}{\partial y} \cdot y + \frac{\partial W}{\partial z} \cdot z \right) + \\
 & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \cdot x^2 + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \cdot y^2 + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \cdot z^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \cdot xy + 2 \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} \cdot xz + 2 \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z} \cdot yz \right) + \\
 & + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} \cdot x^3 + \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} \cdot y^3 + \frac{\partial^3 W}{\partial z^3} \cdot z^3 + 3 \cdot \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} \cdot x^2 y + 3 \cdot \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial z} \cdot x^2 z + \right. \\
 & + 3 \cdot \frac{\partial^3 W}{\partial y^2 \partial x} \cdot y^2 x + 3 \cdot \frac{\partial^3 W}{\partial y^2 \partial z} \cdot y^2 z + 3 \cdot \frac{\partial^3 W}{\partial z^2 \partial x} \cdot z^2 x + 3 \cdot \frac{\partial^3 W}{\partial z^2 \partial y} \cdot z^2 y + 6 \cdot \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y \partial z} \cdot xyz \left. \right) + O(4, \dots, \infty)
 \end{aligned} \quad (3)$$

A harmad- és magasabb fokú tagoknak nincs külön elnevezésük. Amint látható, a tagok száma a fokszám emelkedésével növekszik (lásd az 1. táblázatot). Az $O(4, \dots, \infty)$ tag a Taylor-sor magasabb fokú tagjait jelöli.

2.3. A Laplace–Poisson-egyenlet kielégítése

Ennek a Taylor-sorfejtésnek azonban van egy sajátos hátránya a széles körben alkalmazott gömbharmonikus sorfejtéshez képest: a sorfejtés tagjai alapesetben nem elégítik ki a Laplace–Poisson-egyenletet. A gravitációs potenciál gömbharmonikus sorfejtésének felírása során nem lép fel ez a probléma, mert az a Laplace-egyenlet gömbkoordinátákban történő megoldásán alapul, és a gömbharmonikus sorfejtés bázisfüggvényei már magukban kielégítik a Laplace-egyenletet.

Annak vizsgálatára, hogy milyen feltételeknek kell teljesülniük ahhoz, hogy a Taylor-sorfejtés a Laplace–Poisson-egyenlet megoldása legyen, helyettesítsük be a Taylor-sor tagjait a Laplace-egyenletbe!

Alkalmazzuk a Laplace-operátort, vagyis a koordináták szerinti kétszeres deriválást a Taylor-sor minden fokára! A nullad fokú tagok második deriváltjai zérus értékűek, mivel ezen tagok nem tartalmazzák a helykoordinátákat. Hasonlóképpen, a Laplace-operátort az első fokú tagokra alkalmazva az eredmény szintén nulla. A Laplace-operátort a másodfokú tagokra alkalmazva azt találjuk, hogy mivel a deriváltak a helykoordináták második hatványával vannak szorozva, két deriválás után a helykoordináták kiesnek az egyenletből, ami összevetve a Laplace-Poisson (2.) egyenlettel – látható, hogy pontosan $2\omega^2$.

A Laplace-operátort a harmadfokú tagokra alkalmazva a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} x + \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} y + \frac{\partial^3 W}{\partial z^3} z + \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} y + \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial z} z + \\
 & + \frac{\partial^3 W}{\partial y^2 \partial x} x + \frac{\partial^3 W}{\partial y^2 \partial z} z + \frac{\partial^3 W}{\partial z^2 \partial x} x + \frac{\partial^3 W}{\partial z^2 \partial y} y
 \end{aligned} \quad (4)$$

A tagokat a helyvektor koordinátái szerint csoportosítva:

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 W}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^3 W}{\partial z^2 \partial x} \right) x + \left(\frac{\partial^3 W}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 W}{\partial z^2 \partial y} \right) y + \\
 & + \left(\frac{\partial^3 W}{\partial z^3} + \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial z} + \frac{\partial^3 W}{\partial y^2 \partial z} \right) z
 \end{aligned} \quad (5)$$

Mivel a Laplace-Poisson (2) egyenlet jobb oldala a másodfokú taggal már teljesült, a harmadfokú (és minden további magasabb fokú) tagokra alkalmazott Laplace-operátor eredményének nullának kell lennie. Ez csak akkor teljesül, ha a 5. egyenlet eredménye az origó környezetében helyfüggetlenül nulla, azaz a helykoordinátákkal szorzott együtthatók értéke nulla. Ez három kényszerfeltételt vezet be:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 W}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^3 W}{\partial z^2 \partial x} = 0 \\
 & \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 W}{\partial z^2 \partial y} = 0 \\
 & \frac{\partial^3 W}{\partial z^3} + \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial z} + \frac{\partial^3 W}{\partial y^2 \partial z} = 0
 \end{aligned} \quad (6)$$

Hasonlóképpen, a negyedfokú tagok esetében, a Laplace-operátor alkalmazása során az egyes tagok rendre x^2 , y^2 , z^2 , xy , xz , yz tényezőkkel szorozódnak. Ezeket összevonva, az ezen tagokhoz tartozó együtthatók kombinációjának nullának kell lennie, így 6 kényszerfeltételt kell alkalmazni.

Minden magasabb fokú tag esetében, a Laplace-operátor alkalmazása és a tagok helyvektor-komponenseinek hatványai szerinti összevonása után az együtthatók kombinációjának nullát kell adnia. Ezeket az eredményeket az 1. táblázat foglalja össze.

Táblázat 1.: A Taylor-sorfejtés egyes fokszámaihoz tartozó tagok-, a kényszerfeltételek- és a független együtthatók száma

Fokszám	Tagok száma	Kényszer-feltételek	Független együtthatók
0	1	0	1
1	3	0	3
2	6	1	5
3	10	3	7
4	15	6	9
⋮	⋮	⋮	⋮
n	$\frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1$	$\frac{n(n-1)}{2}$	$2n + 1$

Megjegyzendő, hogy az 1. táblázatban a független együtthatók száma megegyezik a Laplace-egyenlet gömbkoordinátákban felírt megoldásának azonos fokszámú együtthatóinak számával.

2.4. Az Eötvös-féle torziós inga

Eötvös a számításai során a nehézségi potenciál Taylor-sorfejtésében csak a másodrendű tagokig ment el (Eötvös, 1911). A nehézségi potenciál második deriváltjai egy mátrixba helyezhetők, amelyet Eötvös-tenzornak nevezünk.

Az Eötvös-tenzor egy szimmetrikus tenzor, aminek 6 független eleme van.

$$E = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Az Eötvös-inga egy érzékeny torziós szálon felfüggesztett könnyű rúdból áll, amelynek két végén azonos tömegek helyezkednek el. Az egyik tömeg az ingakaron helyezkedik el, a másik viszont ettől valamivel mélyebben. Ha a torziós ingát magára hagyjuk, a nehézségi erőter forgatónyomatékokat gyakorol az ingatestre, ami a torziós szál elcsavaródását okozza; az elfordulás szögértéke egy skálán olvasható le (Eötvös, 1908).

A forgatónyomatékok leíró egyenletben az Eötvös-tenzor elemei (illetve bizonyos elemek különbségei) szerepelnek. Ebből adódóan, az Eötvös-inga lehetővé teszi négy mennyiség meghatározását: az Eötvös-tenzor három elemének $\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z}, \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z}\right)$, valamint a főátló két eleme különbségének $\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)$ megmérését.

Mivel a torziós szál torziómentes, nyugalmi helyzete nem ismert, összesen öt ismeretlent kellett kiszámítani, amihez öt leolvasásra volt szükség. Ezt úgy érték el, hogy minden mérési ponton az inga rúdját öt különböző irányba (egymástól 72°-ra) forgatták el, majd megvárták a lengések csillapodását (kb. egy óra), és ezután végezték el a leolvasást.

2.5. Eötvös Loránd inga-méréseinek grafikus ábrázolása

Eötvös elemezte a mátrixelemek jelentését, és két szemléletes mennyiséget vezetett be az eredmények vizualizálására.

- Horizontális gradiens: A nehézségi gyorsulás (g) vízszintes irányban tapasztalható legnagyobb változásának mértékéeként definiáljuk. A horizontális gradiensvektor komponensei megegyeznek két mért mennyiséggel: $\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z}\right)$ és $\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z}\right)$. Ezek a mennyiségek a térképen a mérési pontból kiinduló vektor komponenseiként ábrázolhatók, amelyek a szintfelület mentén a nehézségi gyorsulás növekedésének irányába mutatnak. A vízszintes gradiensadatokból származtatott gradiens-térképeket (1. ábra) a

geofizikai kutatásokban antiklinálisok lehatárolására használták.

$$\nabla|g| = \left[\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z}; \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z} \right] \quad (8)$$

- Horizontális irányítóképesség (R): A szintfelület differenciális görbületéből származó erő, amelyet Eötvös horizontális irányítóképességnek nevezett el. A horizontális irányítóképesség a maximális és a minimális görbület különbségének és a nehézségi gyorsulásnak a szorzata, amely két mért mennyiség felhasználásával a következő módon számítható ki:

$$R = g \cdot \left(\frac{1}{r_{\min}} - \frac{1}{r_{\max}} \right) = \sqrt{\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + 4 \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}} \quad (9)$$

A horizontális irányítóképesség a legnagyobb görbület (vagyis a legkisebb görbületi sugár) irányába mutat. Ez az irány az északtól számított α azimutsszöggel fejezhető ki, amely a következő egyenlettel számítható:

$$\tan 2\alpha = \frac{-2 \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}}{\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)} \quad (10)$$

3. Adatok

3.1. Eötvös mérései

Eötvös Loránd, Lóczy Lajos, Cholnoky Jenő, Kövesligethy Radó, Harkányi Béla, Pekár Dezső és Steiner Lajos 1901 és 1903 telén tesztelték az Eötvös-féle torziós inga terepi alkalmazhatóságát a Balaton sík jégfelületén. Összesen 28 mérést végeztek a Balaton északkeleti medencéjében 1901 telén, és további 12 mérést a délnyugati medencében 1903-ban.

A mérési pontok helyét az előző állomástól láncolattal történő távolságméréssel, valamint korabeli topográfiai térképeken végzett grafikus hátrametszéssel határozták meg (Eötvös, 1911; Eötvös, 1908). A mérőállomások földrajzi koordinátáit is publikálták, amik az adott korban elérhető 1:75000 méretarányú katonai térképek ellipszoidi koordinátái. Ezeket a szélességi és hosszúsági koordinátákat WGS84 rendszerbe transzformáltuk. (Molnár & Timár, 2009). A becslött abszolút pozicionálási pontosság körülbelül 100 méter, bár az állomások közötti relatív hiba várhatóan 50 méter alatt marad.

Az egyes mérési pontokon az északi irányt mágneses tájolóval határozták meg, és az első leolvasáshoz az ingát a mágneses észak irányába állították. A feldolgozás során a mért értékeket a 7°30'-es mágneses deklinációval (mágneses elhajlással) korrigálták a valódi északi irány meghatározásához (Selényi, 1953).

A jegyzőkönyveket és a mért adatokat táblázatosan is közlő publikációból (Eötvös, 1908), a kifejlesztett elméleti modell bemutatásához a „7”-es mérési pont körüli méréseket

nehézségi modell állandóit (11. egyenlet) használtuk, $N = 3$, vagyis $2n = 6$ foksámsig közelítve. Ezeket az értékeket tekintjük a modellparaméterek kezdeti értékeinek. Minden más,

magasabb fokú együtthatót nullának tekintünk. Ezeket az együtthatókat egy ismeretlenből álló tömbbe, x_0 -ba rendezzük, ahol a 0 alsó index a kezdeti értékeket jelöli.



2. ábra: Eötvös ábrája az 1901. évi mérésekből meghatározott horizontális irányítóképesség értékeit mutatja a Balaton északkeleti medencéjében (Eötvös, 1908). A grafikus ábrázoláshoz a horizontális irányítóképesség szakaszok hosszát a 9. egyenlettel, a szakaszok irányát pedig a 10. egyenlettel lehet kiszámolni.

A funkcionális modell a modell (ismeretlen) paraméterei és a modellből számított mennyiségek közötti matematikai kapcsolat; ezek a mennyiségek közvetlenül összehasonlíthatók a torziós inga méréseivel. Ehhez először meg kell határoznunk a mérési pontoknak a modellkoordináta-rendszerbeli koordinátáit. A mérési pontok vízszintes modellkoordinátái (x és y) adottak, ezekhez kiszámítjuk az egyes mérési pontok függőleges modellkoordinátáit (z), mivel a Taylor-sorfejtés valódi Descartes-féle topocentrikus koordinátákat igényel. A jégfelületen azonos magasságban lévő mérési pontok a Föld görbülete miatt a modellkoordináta-rendszer kezdőpontjának vízszintes síkja alatt helyezkednek el. Ezt a függőleges távolságot a modell aktuális paramétereivel számítjuk: iterációval keressük meg az i -edik állomás azon (z) értékét, ahol a számított potenciál megegyezik a modellkoordináta-rendszer kezdőpontjának potenciáljával. Természetesen a modellparaméterek frissítésekor a számítást minden mérési pontra újra el kell végezni.

Ahhoz, hogy a mérési helyen a potenciál második deriváltjainak a modellből kiszámolt értékeit össze tudjuk hasonlítani az Eötvös-inga mérésekből kapott értékekkel, szükségünk lesz a modellkoordináta-rendszer és az i -edik mérési pont helyi

koordináta-rendszere közötti transzformációt leíró R_i mátrixra. A Föld görbülete miatt a mérési pont helyi vízszintes síkja a modellkoordináta-rendszerhez képest megdől. A potenciál modell felhasználásával és a potenciál első deriváltjának kiszámításával az i -edik mérési ponton megkapjuk a helyi függőleges vektor komponenseit a modellkoordináta-rendszerben. Ez a vektor helyi érintő sík normálvektora. A mérési pont vízszintes koordinátáiból kiszámítjuk a meridiánkonvergenciát, a koordináta-rendszer origójára vonatkoztatva, azaz a koordináta-rendszer kezdőpontjában és a mérési ponton érvényes valódi északi irányok közötti szöveget. Ezen értékek felhasználásával előállítjuk az R_i forgatási mátrixokat minden mérési pontra (Iliffe, 1987).

Ezután tudjuk kiszámolni a modell második deriváltjait a mérési pont helyi koordináta-rendszerében. Ehhez először kiszámítjuk a modell második deriváltjait a mérési pontokon (a modellkoordináta-rendszerben). Ez a számítás analitikusan elvégezhető a 3. egyenlet alapján. Ezek a második deriváltak alkotják a számított Eötvös-tenzor elemeit. A mérési pont helyi koordináta-rendszerbe történő transzformáció a következő:

$$E_i^{local} = R_i^T E_i^{model} R_i \quad (12)$$

ahol E_i^{model} az i -edik mérési ponton számított Eötvös-tenzor, R_i a forgatási mátrix, E_i^{local} pedig az i -edik mérési pont helyi koordináta-rendszerében érvényes Eötvös-tenzor.

A mérési pont lokális koordináta-rendszerében számolt Eötvös-tenzorból képezzük a mérésekkel összehasonlítható négy mennyiséget $\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\right), \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z}\right), \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z}\right)$, és $\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)$.

Ezek a mennyiségek a közvetítőegyenletek megoldásai, amik a paramétereknek, vagyis a modellben szereplő magasabb deriváltaknak a (nemlineáris) függvényei.

A modellparaméterek becslése során azt tapasztaltuk, hogy a megoldás stabilizálása érdekében szimulált mérésekre van szükség. Ez minden mérési pont esetében az Eötvös-tenzor $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)$ eleme, amit az adott mérési pontra számított WGS84 normál modellből számítottunk.

Célunk a modell együtthatóinak becslése. Mivel rendelkezünk az együtthatók kezdeti értékeivel x_0 , olyan x javításokat keresünk, amelyeket a kezdeti paraméterekhez hozzáadva megkapjuk a modellparaméterek javított értékeit.

A tisztatag vektor (I) a mért (plusz egy szimulált) Eötvös-inga mérések vektorának (L) és az egyes mérési pontokra számított mennyiségeknek a különbségéből áll. (Ez utóbbi értékeket szintén vektorba rendezzük):

Az A alakmátrix a funkcionális modell által számított mennyiségek modell-együtthatók szerinti parciális deriváltjait tartalmazza, amit analitikus módon tudunk előállítani. Esetünkben, mivel a mérések pontosságáról nem állt rendelkezésre előzetes információ, minden méréshez egyenlő, egységnyi súlyt rendeltünk, így a P mátrix egységmátrix.

A legkisebb négyzetek módszere szerint a célfüggvényt, vagyis az eltérések súlyozott négyzetösszegét minimalizálni kell a paraméterek javításainak függvényében ($v^T P v := \min$). Esetünkben, mivel az ismeretlen paraméterekre kényszerfeltételek vonatkoznak, a legkisebb négyzetes becslés a Lagrange-multiplikátorok módszerével végezhető el, vagyis a paraméterek javításai (x) mellett a korrelátákat (k) is kiszámítjuk.

A paraméterek javításainak (x) meghatározása után ezeket hozzáadjuk a paraméterek kezdeti értékeihez (x_0). A teljes folyamatot addig ismételjük, amíg a javítások abszolút értéke egy előre meghatározott kis ϵ érték alá nem csökken, ez a gyakorlatban két iteráció elvégzését jelentette.

4.2. Lokális potenciálmodell

Az ismertetett módszert Eötvös méréseire alkalmazva meghatároztuk a 4. fokú lokális Taylor-sorfejtésű modell együtthatóit. A modellt két különböző mérési sűrűség mellett vizsgáltuk az $10 \text{ km} \times 10 \text{ km}$ -es területen: először az összes rendelkezésre álló (16 darab), majd egy ritkített, felezett (8 darab) mérési-pont adatrendszer felhasználásával.

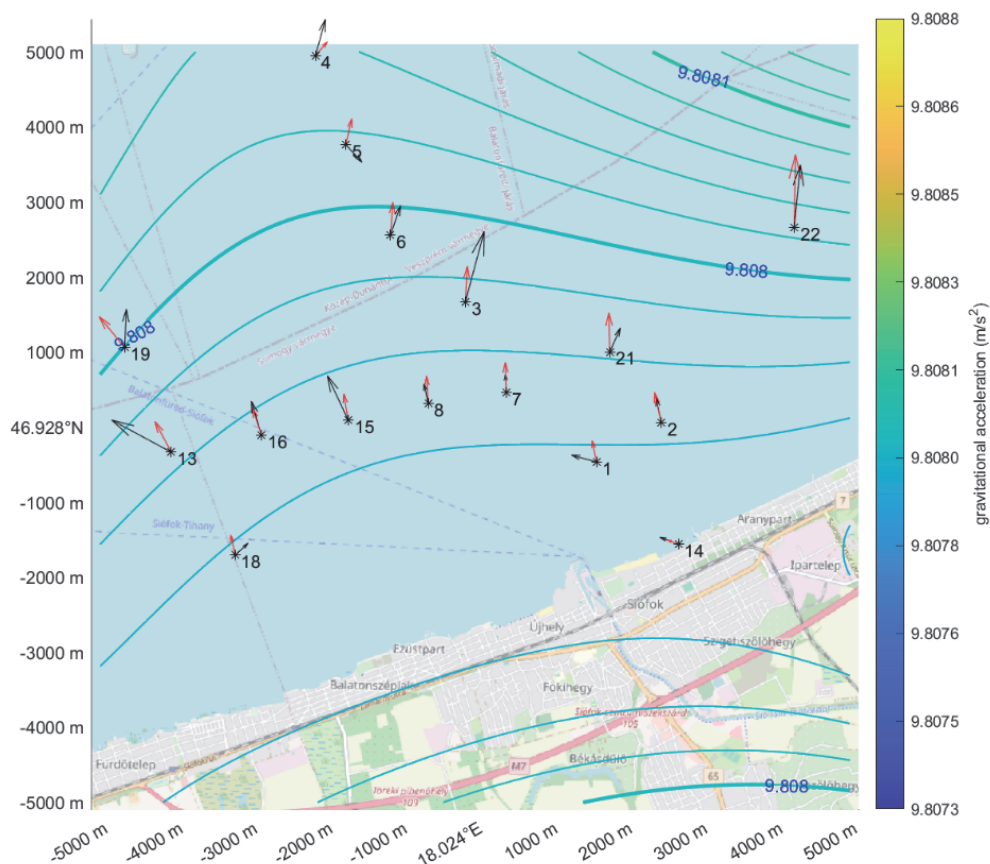
A nehézségi potenciál a modellkoordináta-rendszer origója környezetében a 3. egyenlettel számítható ki. A szintfelületet tehát azok a pontok definiálják, amelyeknek koordinátáit az egyenletbe beírva a koordináta-rendszer kezdőpontjában előírt 0 potenciálértéket kapjuk meg.

Eredményeink szemléltetése érdekében Eötvös térképeirez hasonló térképeket készítettünk. A megjelenített mennyiségeknek (horizontális gradiens és horizontális irányítóképesség) mind a modellből számított, mind pedig az adott mérési helyre vonatkozó értékét is ábrázoltuk a térképeken.

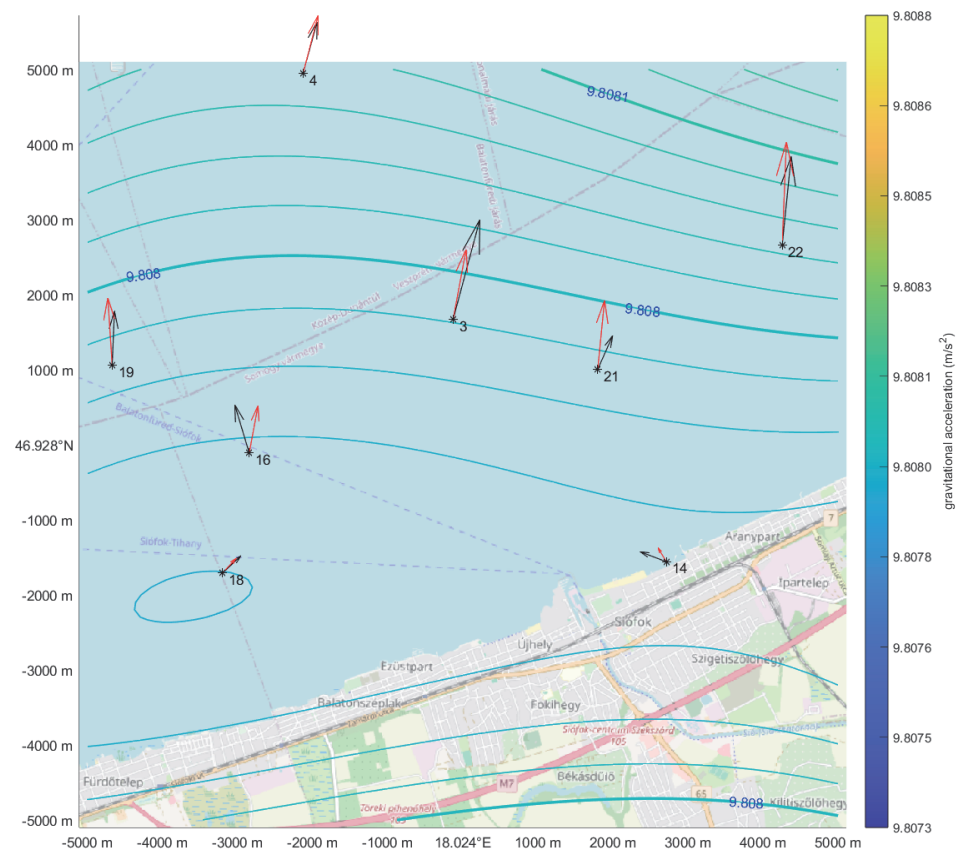
4.2.1. Horizontális gradiens térkép

A 3. és 4. ábrán a mért és a számított horizontális nehézségi gradiensok láthatók. A gradiensvektorok mellett a térképen az azonos nehézségi gyorsulást jelző szintvonalak, az úgynevezett izogammák is megjelennek. Az izovonalakat a következő módon származtatjuk a modellből: először a modell vízszintes (x és y) koordinátapárjához meghatározzuk azt a z koordinátát, ahol a potenciál értéke megegyezik a modellkoordináta-rendszer kezdőpontjának potenciáljával. A következő lépésben a modellből analitikusan meghatározzuk a 3D koordináta-hoz tartozó nehézségi gyorsulásvektort, majd kiszámítjuk a vektor nagyságát, és ezt szintvonalas térképként ábrázoljuk. A mérési helyeken számított nehézségi gradiensok – a várakozásoknak megfelelően – merőlegesek a nehézségi gyorsulás szintvonalaira.

- 16 pontos modell (3. ábra): A sűrűbb adathálózat alkalmazásával a modell részletgazdagabb, jobban leköveti a nehézségi tér helyi anomáliáit. Az izogammák lefutása tükrözi a mérési pontok közötti finomabb változásokat.
- 8 pontos modell (4. ábra): A felhasznált mérési pontok számának felezésével az eredmény trendszerűbb lesz. A modell a nagyobb léptékű trendeket továbbra is jól jelzi, de a lokális hatások elmosódnak.



3. ábra: A negyedfokú Taylor-polinomos megoldásból számolt horizontális nehézségi gradiens sűrű mérési hálózat (16 pont) alkalmazásával (piros), összehasonlítva Eötvös méréseivel (fekete). A szintvonalak a nehézségi gyorsulás izovonalait jelölik a szintfelületen m/s^2 egységben.

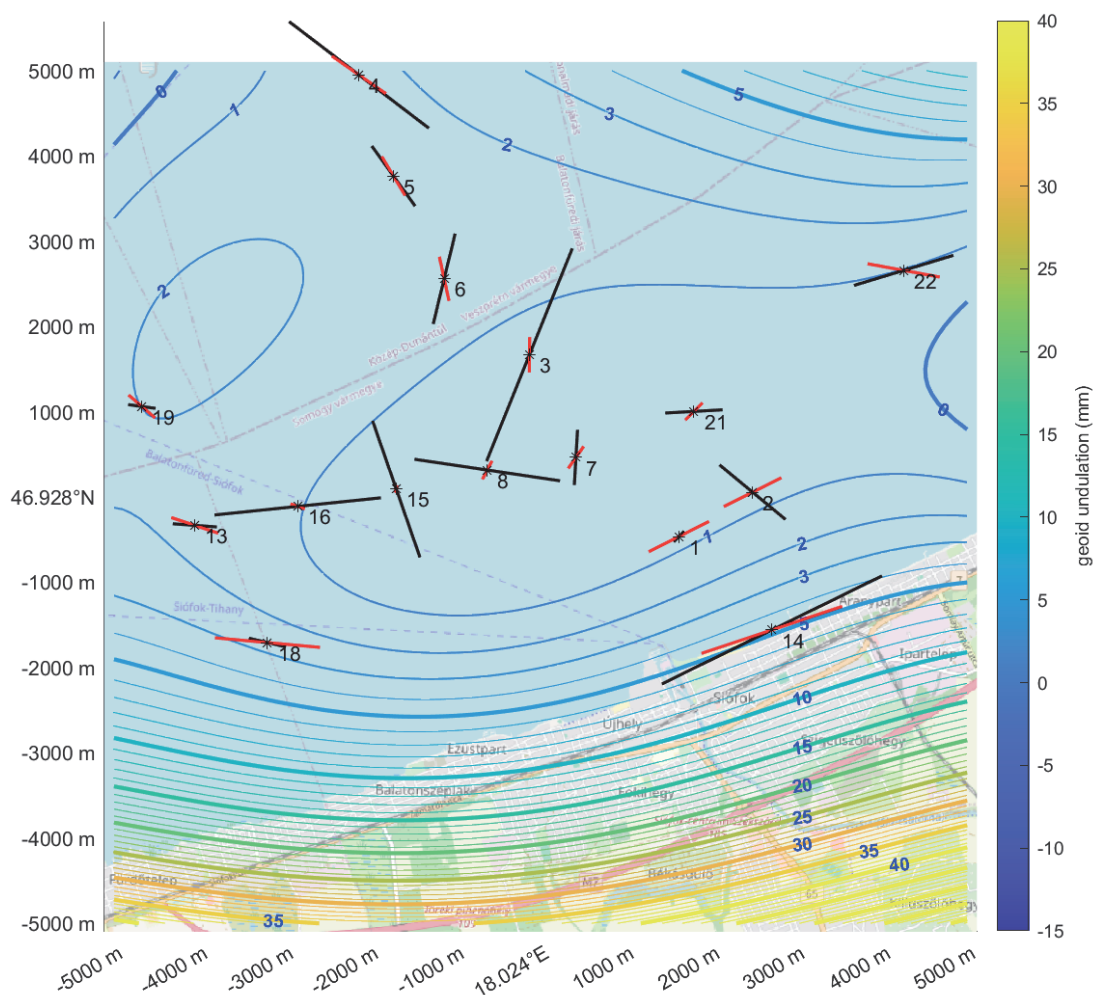


4. ábra: A negyedfokú Taylor-polinomos megoldásból számolt horizontális nehézségi gradiens ritkított mérési hálózat (8 pont) alkalmazásával (piros), összehasonlítva Eötvös méréseivel (fekete), valamint a nehézségi gyorsulás izovonalai a szintfelületen, m/s^2 egységben.

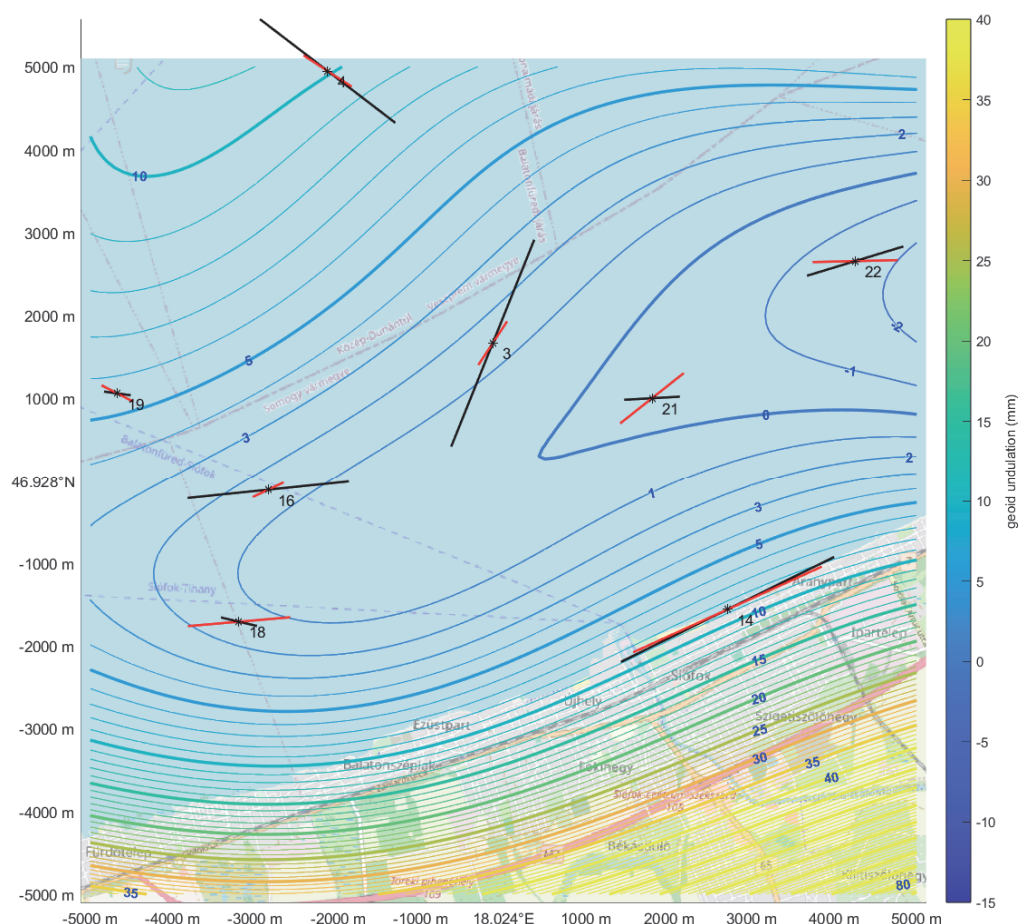
4.2.2. Horizontális irányítóképesség és geoidunduláció térkép

Az 5. és 6. ábra a horizontális irányítóképességet és a lokális nehézségi potenciáladatokból származtatott geoidundulációt szemlélteti. A szintvonalak a lokális szintfelületnek a helyileg illesztett ellipszoidtól való függőleges eltéréseit mutatják milliméterben. A számítások alapjául a WGS84 ellipszoid szolgált, amelyet helyileg a „7”-es mérési pont melletti pont, pontosan 46.928 N, 18. 24 E koordináta vízszintes síkjához igazítottunk. A meridián- és harántirányú görbület meghatározásához a „7”-es mérési pont mellett kijelölt pont WGS84 dátumhoz tartozó ellipszoidi koordinátáit használtuk. A horizontális irányítóképességet szemléltető szakaszok iránya valójában a minimális görbületnek, azaz a legnagyobb görbületi sugárnak megfelelő irányt jelzi (Eötvös, 1908).

- 16 pontos modell (5. ábra): A sűrűbb mintavételezés és a magasabb fokszámú Descartes-féle leírás eredményeként a térkép részletgazdagabb képet ad a nehézségi erőter lokális anomáliáiról. Mivel több feltételnek (több mérési pontnak) kell megfelelni, a számított szintfelület követni tudja a rövid hullámhosszú változásokat is. Ez a modell pontosabban mutatja meg a tömegkoncentrációk okozta lokális domborulatokat a szintfelületen, ahol a geoid az ellipszoid fölé emelkedik.
- 8 pontos modell (6. ábra): Alacsonyabb fokszámú vagy ritkább adatsor esetén a számított szintfelület csak a hosszú hullámhosszú, globális tendenciákat mutatja meg, a lokális hatásoktól mentes lesz. Ez a leegyszerűsített forma jól szemlélteti a nehézségi erőter általános trendjeit, de elveszíti a finomabb struktúrákat, amelyeket a 16 pontos változat még detektálni tudott.



5. ábra: A helyi geoidunduláció és a horizontális irányítóképesség mennyiségei sűrű mérési hálózat (16 pont) esetén. A szintvonalak a kapott lokális szintfelület függőleges eltérését mutatják a helyileg illesztett ellipszoidhoz képest, milliméterben. A modell a negyedfokú Taylor-polinomos megoldás szimulált eredménye (piros), összehasonlítva Eötvös méréseivel (fekete).



6. ábra: A helyi geoidunduláció és a horizontális irányítóképesség mennyiségei ritkított mérési hálózat (8 pont) esetén. A szintvonalak a lokális szintfelület függőleges eltérését mutatják a helyileg illesztett WGS84 ellipszoidtól, milliméterben. A modell a negyedfokú Taylor-polinomos megoldás szimulált eredménye (piros), összehasonlítva Eötvös méréseivel (fekete).

5. Diszkusszió

A kifejlesztett negyedfokú polinommodell összesen 35 paraméterrel írja le a potenciálfüggvényt. A kényszerfeltételek és rögzített értékek figyelembevételével összesen 21 meghatározandó együtthatót becsültünk. A paraméterbecslés numerikus stabilitását a korrelációs mátrix átlagos korrelációjával számszerűsítettük. A 8 mérési pontot felhasználó modell esetén ez a mutató 0,476, míg a 16 pontos adathálózathoz képest jelentősen kedvezőbb, 0,208-as érték lett. Ez a jelentős csökkenés igazolja, hogy a túlhatározottság mértékének növelése hatékonyan javítja a paraméterek szétválaszthatóságát, biztosítva az inverziós eljárás megbízhatóságát és numerikus stabilitását.

Bár a térképek a teljes $10 \text{ km} \times 10 \text{ km}$ -es területet lefedik, a polinomfüggvények extrapolációs tulajdonságai miatt a mérési területen kívüli részeken a modell viselkedése bizonytalan, és ott nem kívánt szélsőséges geoidunduláció-értékek jelenhetnek meg. Megfigyelhető, hogy a torziósingamérések számának növelésével a kapott szintfelület részletesebb lesz, míg az adatok ritkítása (8 pont) természetes szűrőként működik, trendszerűbb potenciálteret eredményez.

A lokális modell kiterjesztése egy szélesebb regionális modellre a Taylor-sorfejtésű modell fokszámának növelésével lehetséges. A magas fokszámú polinomfüggvények kiszámíthatatlan viselkedése miatt azonban ez a megközelítés nem javasolt. Alternatív megoldásként ajánlott stratégia a jövőben az alacsonyabb fokszámú modellek integrálása, amelyek mindegyike a mérések egy részhalmazát fedi le. Ennek egyik módja egy ésszerű méretű rács meghatározása, amelynek minden cellája egy alacsony fokú polinommodell nehézségi potenciálját képviselő paraméterkészletet tartalmaz. Ezen modellek illesztésével biztosítható a potenciál és deriváltjainak folytonossága a ráccsellák határain. Egy másik stratégia a szabálytalan háromszögháló (TIN) alkalmazása lehet, ahol a mérési pontok a háromszögek csúcspontjain helyezkednek el. Ebben az elrendezésben a másod- vagy harmadfokú nehézségi modell paraméterei minden háromszögön belül becsülhetők, biztosítva a modellek illeszkedését a háromszögek határain.

A fejlesztés jövőbeli iránya a torzióingamérések mellett a mért nehézségi gyorsulás, a szintezett és a GNSS-alapú magasság különbségéből számított geoidunduláció, a stellárfotográfiával meghatározott függővonal-elhajlás mérések, illetve a teljes tenzor gradiometriai adatok integrálása a modellparaméterek becslésébe. Elméletileg ennek nincsen akadály, mivel ezen

méréssel meghatározható mennyiségek mindegyikéhez származtatható közvetítő egyenlet a potenciálmodellből.

6. Konklúzió

A bemutatott, a nehézségi potenciál Taylor-sorfejtésén alapuló modell elméletileg megalapozott és minimális feltételezéseken alapul. A modell alkalmazásakor célunk magának a potenciálfüggvénynek, vagyis a Taylor-soros közelítésben szereplő együtthatóknak a meghatározása, biztosítva, hogy a kapott potenciálfüggvény kielégítse a Laplace-Poisson-egyenletet.

Megállapítottuk, hogy egy megfelelően megválasztott fokszámú modell képes részletesen leírni egy kisebb terület nehézségi potenciálját. A negyedfokú Taylor-modell vizsgálata során igazoltuk, hogy a mérési sűrűség alapvetően befolyásolja az eredményt: a nagyobb számú (16 pont) mérés bevonása részletgazdagabb, a helyi változásokat pontosabban követő modellt eredményez, míg a ritkább (8 pont) adathalmaz lokális részletektől mentes potenciálteret szolgáltat.

A létrehozott lokális modell a koordináta-rendszerünk kezdőpontja körüli nehézségi potenciált írja le, bár jelenlegi formájában a modell térbeli alkalmazhatósága nagyobb területet lefedő regionális skálán korlátozott.

Irodalomjegyzék

- Ádám, J., Biró, P., Völgyesi, L., & Tóth, Gy. (2013). *A felsőgeodézia elmélete és gyakorlata*. Budapest: HM Zrínyi Térképészeti és Kommunikációs Szolgáltató Nonprofit Kft. Kiadó.
- Bölling, K., & Grafarend, E. (2005). Ellipsoidal spectral properties of the Earth's gravitational potential and its first and second derivatives. *Journal of Geodesy*, 79, pp. 300-330. <https://doi.org/10.1007/s00190-005-0465-y>
- Buchar, E. (1958). Motion of the nodal line of the second Russian Earth satellite, and flattening of the Earth. *Nature*, 182, pp. 198-199. <https://doi.org/10.1038/182198b0>
- Cook, A. (1958). Determination of the Earth's Gravitational Potential from Observations on Sputnik 2 (1957beta). *Geophysical Journal International*, 1(4), pp. 341-345. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1958.tb05343.x>
- Dobróka, M., & Völgyesi, L. (2008). Inversion Reconstruction of Gravity Potential Based on Gravity Gradients. *Mathematical Geosciences*, 40, pp. 299-311. <https://doi.org/10.1007/s11004-007-9139-z>
- Eötvös, L. (1908). *A Balaton vízfelülete és azon a nehézség változásai*. Budapest: A Balaton tudományos tanulmányozásának eredményei. I.Kötet, I.Rész, Geofizikai függelék.
- Eötvös, L. (1911). II. Sezione. Die Niveaulächen und die Gradienten der Schwerkraft am Balatonsee. In L. Lóczy (Ed.), *Resultate der wissenschaftlichen Erforschung des Balatonsees*. Wien: Balaton-Ausschuss der ungarischen geographischen Gesellschaft.
- Haalck, H. (1950). I. Die vollständige Bestimmung örtlicher gravimetrischer Störungsfelder aus Drenwaagemessungen... II. Das physikalische Bildungsgesetz der Figur der Erde. Berlin: Akademie-Verlag. <https://doi.org/10.1515/9783112730232>
- Heiskanen, W. (1957). The columbus geoid. *Eos Trans. AGU*, 38(6), pp. 841-848. <https://doi.org/10.1029/TR038i006p00841>
- Helmert, R. (1910). Methode von Baron Eötvös zur Messung zweiter Differentialquotienten des Schwerepotentials. In *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*. Leipzig: Teubner.
- Iliffe, J. (1987). Three dimensional adjustments in a local reference system. *Applied Geodesy* (pp. 247-267). Berlin, Heidelberg: Springer. <https://doi.org/10.1007/BFb0010119>
- Jäggi, A., Peter, H., Meyer, U., Beutler, G., Visser, P., van den IJssel, J., ... Heinze, M. (2010). GOCE Science Orbits and their Application to Gravity Field Recovery. I, p. 05.
- Jeffreys, H. (1929). *The Earth: its origin, history and physical constitution*. Cambridge: University Press.
- Kenyeres, A. (1993). Detailed Geoid Determination Using the Combination of Truncated Global Integrals and Geopotential Model. *Periodica Polytechnica Ser. Civ. Eng.*, 37(2), pp. 91-108.
- LaCoste, L. B., & Romberg, A. (1941). *Patent No. US Patent no. 2,377,889*.
- Laplace, P. S. (1825). *Traité de mécanique céleste* (Vol. 5). Paris: Chez JBM Duprat.
- Lemoine, F., Kenyon, S., Factor, J., Trimmer, R., Pavlis, N., Chinn, D., ... Olson, T. (1998). *The development of the joint NASA GSFC and the National Imagery and Mapping Agency (NIMA) geopotential model EGM96*. NASA, Goddard Space Flight Center Greenbelt, Maryland.
- Listing, J. (1872). Über unsere jetzige Kenntniss der Gestalt und Grösse der Erde. In *Nachrichten der K. Ges. des Wiss.* (p. 66). Göttingen: Deiterich.
- Lóczy, L. (1911). Resultate der Wissenschaftlichen Erforschung des Balatonsees. Resultate der wissenschaftlichen Erforschung des Balatonsees. In *Balaton-Ausschuss der ungarischen geographischen Gesellschaft*. Wien: In Kommission von E. Hölzel.

- Molnár, G., & Timár, G. (2009). Mosaicking of the 1: 75 000 sheets of the Third Military Survey of the Habsburg Empire. *Acta Geodaetica et Geophysica Hungarica*, 44(1), pp. 115-120. <https://doi.org/10.1556/AGeod.44.2009.1.11>
- Moritz, H. (1980). Geodetic reference system 1980. *Bulletin géodésique*, 54(3), pp. 395-405. <https://doi.org/10.1007/BF02521480>
- Newton, I. (1687). *Philosophiae naturalis – Principia mathematica*. London: Pepys. <https://doi.org/10.5479/sil.52126.39088015628399>
- Pavlis, N., Holmes, S., Kenyon, S., & Factor, J. (2012). The development and evaluation of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008). *J. Geophys. Res.*, 117(B4). <https://doi.org/10.1029/2011JB008916>
- Raul, V. (1941). *Report on the torsion balance survey in the area between Lake Balaton, Lake Velence and the Danube*. Hungarian-American Oil Company (MAORT).
- Schmidt, M., Fengler, M., Mayer-Gürr, T., Eicker, A., Kusche, J., Sánchez, L., & Han, S.-C. (2007). Regional gravity modeling in terms of spherical base functions. *Journal of Geodesy*, 81, pp. 17-38. <https://doi.org/10.1007/s00190-006-0101-5>
- Selényi, P. (Ed.). (1953). *Roland Eötvös gesammelte Arbeiten*. Budapest: Akadémiai Kiadó.
- Stokes, G. (1849). On the variation of gravity at the surface of the Earth. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 8(5), pp. 672–695.
- Szafián, P., Timár, G., & Horváth, F. (2006). Régi adat nem vén adat: Az Eötvös-ingás mérési eredmények újraélesztéséről. *Magyar Geofizika*, 46(4), 146-151.
- Tóth, Gy. (2009). New combined geoid solution HGTUB2007 for Hungary. *International Association of Geodesy Symposia*, 405-412. https://doi.org/10.1007/978-3-540-85426-5_48
- Tóth, Gy. (2003). The Eotvos spherical horizontal gradiometric boundary value problem-gravity anomalies from gravity gradients of the torsion balance. *Gravity and Geoid 2002, 3rd Meeting of the IGGC*, (pp. 102-107).
- Tóth, Gy., & Szűcs, E. (2011). On the determination of a new combined EGM2008 based quasi-geoid model for Hungary. *Acta Geod.* <https://doi.org/10.1556/AGeod.46.2011.4.4>
- Tóth, Gy., Földvály, L., Tziavos, I., & Ádám, J. (2006). Upward/downward continuation of gravity gradients for precise geoid determination. *Acta Geodaetica et Geophysica Hungarica*, 46(4), 417-430. <https://doi.org/10.1556/AGeod.46.2011.4.4>
- Vening Meinesz, F. (1925). The determination of gravity at sea in a submarine. *The Geographical Journal*, 65(6), pp. 501–514. <https://doi.org/10.2307/1782795>
- Völgyesi, L., Dobróka, M., & Ulmann, Z. (2012). Determination of vertical gradients of gravity by series expansion based inversion. *Acta Geodaetica et Geophysica Hungarica*, 47(2), 233-244. <https://doi.org/10.1556/AGeod.47.2012.2.11>
- Völgyesi, L., Tóth, Gy., Ulmann, Z., Égető, C., & Szűcs, E. (2015). Hungarian contribution to the research in gravimetry - IAG Commission 2. 18(1).
- Zhongolovich, I. (1952). The external gravity field of the Earth and the fundamental constants connected with it.
- Zlinszky, A., Timár, G., Weber, R., Székely, B., Briese, C., Ressler, C., & Pfeifer, N. (2014). Observation of a local gravity potential isosurface by airborne lidar of Lake Balaton, Hungary. *Solid Earth*, 5, pp. 355-369. <https://doi.org/10.5194/se-5-355-2014>



A Magyar Földmérők Arcképcsarnoka

szorozat IV. és V. kötete megvásárolható az MFTTT titkárságán.

A kötetek ára tagjaink részére 5000 Ft.

MFTTT Titkárság