Molnár Attila

Lehetségesség a fizikában

1. Fizika, lehetségesség, logika

Jelen írásban a következő filozófiai kérdésre keressük a választ: Minek alapján mondjuk azt, hogy valami *fizikailag lehetséges*? A fizikában nem ritka a lehetségesség fogalmának használata. Például „Lehetséges-e az, hogy valaki vagy valami gyorsabb legyen a fénynél?" vagy „Előfordulhat-e az, hogy két megfigyelő számára másképp teljen az idő?".

A fizikai szükségszerűség kutatása, azaz annak kutatása, hogy hogyan használjuk a „fizikailag szükségszerű" kifejezést, a fizikusok nyelvének vizsgálatával kell kezdődjön. Ez a nyelv pedig egészen különleges: könyveiket felnyitva képleteket, formulákat, levezetéseket és ezeket magyarázó informális összekötő szövegeket találunk.

Ezek a könyvek tehát valamilyen *deduktív rendszert* követnek: premisszákból konklúziókra következtetnek. Tehát (mégha a premisszák mindegyike nincs is expliciten kifejtve) valamilyen értelemben axiómákból tételeket vezetnek le.

Jelen cikkben egy konkrét fizikai elméleten, a speciális relativitáselmélet egy axiómarendszerén fogjuk megvizsgálni, hogyan jelenik meg a fizikai szükségszerűség.[1] Ehhez azonban előbb ki kell térjünk a relativitáselmélet és a formális logika kapcsolatára.

1.1. Relativitáselmélet és logika

A fizika axiomatikus felépítésének igénye nem új fejlemény. Newton is igyekezett elméletének axiomatikus kifejtésére, sőt Einstein is törekedett eleve posztulátumok formájában bevezetni az elméletét: egy ilyen posztulátum például a jól ismert relativitási elv.

Azonban, ahogy Euklidész axiómarendszere sem tekinthető egy modern értelemben vett axiómarendszernek (ez ugyanis David Hilbert munkásságának köszönhető, amit később Alfred Tarski tökéletesített), úgy Newton és Einstein axiomatikus megközelítésmódja

1 Természetesen nem ez az egyetlen megközelítési módja annak a kérdésnek, hogy hogyan használják fizikusok a fizikailag szükségszerű kifejezést. Egy egészen más, de rokon megközelítés Gyenis Balázsé (Gyenis Balázs 2012), aki a fizikai törvényeket differenciál- vagy propagátoregyenletekkel axiomatizálja, a fizikai lehetséges világokat pedig ezek megoldásaiként fogja fel. Azt lehetne mondani, hogy ennek a megközelítésmódnak a nyelvezete a fizikusok által használt szokásos matematikai apparátust használja, míg az itt felvázolásra kerülő elképzelés jóval konkrétabb, mivel expliciten is kifejtett *axiómarendszerek* formális nyelvére támaszkodik.

https://doi.org/10.54310/Elpis.2013.1.4

sem tekinthető modern értelemben axiomatikus elméletnek.[2] Hilbert, a kor vezető matematikusa éppen ezért nevezte az 1900-as, ún. milleniumi problémái közül a fizika axiomatizálását a hatodik milleniumi problémának.

De mit is jelent az axiomatizálás tulajdonképpen?

1.1.1. Axiomatikus módszer

Egy fizikai rendszer axiomatizálásán azt értjük, hogy először egy formális nyelvet feleltetünk meg az axiomatizálandó fizikai elméletnek. Másodszor kijelölünk néhány olyan formulát, amelyek fizikai alapfeltevések formális megfelelői. Ezeket nevezzük *axiómáknak*. Végül pedig (legtöbbször a klasszikus logika szabályai szerint) levezetésekbe kezdünk, amelyek célja formalizált fizikai törvények bizonyítása, illetve új predikciók megfogalmazása.

Az axiomatikus módszer tehát azzal jár, hogy a fizikai érvelések megítélése a matematikai–logikai sztenderdek szerint kell történjen, tehát a legszigorúbb szabályok szerint, amelyet ma ismerünk. Ennek a szigornak számos előnye van:

1. Tisztázódnak a homályos terminusok.[3]
2. Kiderülnek az elhallgatott feltevések.
3. Világossá válnak azon kritériumok, amelyek alapján eldöntjük, hogy egy bizonyítás jó-e vagy sem.
4. Jól körülhatárolhatóvá válnak az elméletben megfogalmazható állítások.[4]

A formális axiomatikus felépítés azonban fontosabb következményekkel is jár, mint az átláthatóság és a világosság.

2 Noha éppen Newton és Einstein axiomatikus szemlélete miatt ezek az elméletek szépen implementálhatók modern környezetbe, lásd Székely 2012, 1–7. o., illetve ezek összehasonlítását Madarász – Székely 2011. Mi azonban most nem az einsteni posztulátumok formalizálásával próbálkozunk, mivel Einstein második posztulátumát (a relativitási elvet) nehéz formálisan megragadni; ehhez előbb ugyanis olyan kérdésekről kell dönteni, hogy milyen formájú állítások számítanak fizikai törvénynek és milyenek nem. Ezért a speciális relativitáselméletnek egy olyan axiómarendszerét fogjuk használni, amely nem tartalmazza a relativitás elvét, mindössze annak egy triviális következményét.

3 A fizika formalizálása még nem feltétlenül adja meg a választ arra vonatkozólag, hogy a terminusok milyen fizikai jelenségeknek feleltethetők meg. Tehát a homályos terminusok empirikus jelentése nem feltétlenül lesz adott a formalizálás után, de az bizonyos, hogy a formális szemantikai értelemben vett jelentésük világosan meghatározhatóvá válik. Ez utóbbi viszont komoly segítség lehet az empirikus értelmezés során.

4 Egy manapság aktuális példa a következő: Ha nincs olyan közös (konzisztens) axiomatikus elmélete a kvantummechanikának és a relativitáselméletnek, amely új predikciókkal szolgál (márpedig úgy néz ki, hogy ez a helyzet), akkor a kettő terminusait keverő állításoknak sincs megfelelő logikai fedezetük. Erre a közös axiómarendszerre olyan nagy az igény, hogy már nevet is előlegeztek neki: ez lenne majd a *kvantumgravitációs elmélet*.

https://doi.org/10.54310/Elpis.2013.1.4

Azáltal, hogy a fizika formális nyelvre tett szert, terepévé válhat a matematikai logika több mint százéves fejlődése során (javarészt a matematika, de főleg a geometria megalapozása kapcsán) kifejlesztett módszereknek. Csak néhány egyszerűbb ezek közül:[5]

1. Kiderülhet, hogy nem szándékolt vagy nem várt modelljei is vannak az elméletnek.
2. Az axiómák némelyikéről kiderülhet, hogy felesleges, mert levezethető a többiből.
3. Az axiómarendszer részei külön is vizsgálatra érdemesek. Természettudományos elmélet lévén ugyanis az egész rendszer mindig ki van téve a falszifikációnak: bármikor érkezhet egy olyan megfigyelés, amely ellentmond az elmélet predikcióinak, és így új elmélet után kell néznünk. Ilyenkor nagyon hasznos, ha tudjuk, pontosan mely axiómák is felelősek a nem kívánt predikciók levezetéséért.[6]

Az ilyen módszerek alkalmazásának feltétele legtöbbször a következő: az axiomatikus elmélet legyen *elsőrendű*, azaz legfeljebb objektumok fölött kvantifikáljon. Erre azért van szükség, mert a másodrendű logika, tehát az objektumok tulajdonságai és viszonyai fölötti kvantifikáció logikája (és így semmilyen erre épített elmélet) *nem axiomatizálható.*[7]

A továbbiakban az Andréka Hajnal és Németi István által vezetett kutatócsoport elsőrendű logikai axiómarendszereire fogunk támaszkodni, de a fenti igényeket kielégítő módon axiomatizálta a relativitáselméletet Goldblatt 1987,[8] és részben hasonló módon (halmazelméletbe ágyazva) axiomatizálta Benda 2008 is.

2. Klasszikus speciális relativitáselmélet

2.1. Nyelv és modellek

Természettudományos és matematikai terminusokat is használó elméletek kapcsán praktikus olyan formális megoldást találni, amely nem keveri feleslegesen a különböző típusú (idegen szóval szortú) terminusokat; például nem vonnak gyököt fizikai indivi-

5 További motivációkért lásd: Székely 2011, Madarász–Székely 2011.

6 Itt még olyan, látszólag nem fizikai kérdéseket is fel lehet tenni, hogy pl. „szükséges-e a valós számok használata a relativitáselméletben?" Erre a meghökkentő válasz egyébként nemleges, lásd: Madarász–Németi – Székely 2012.

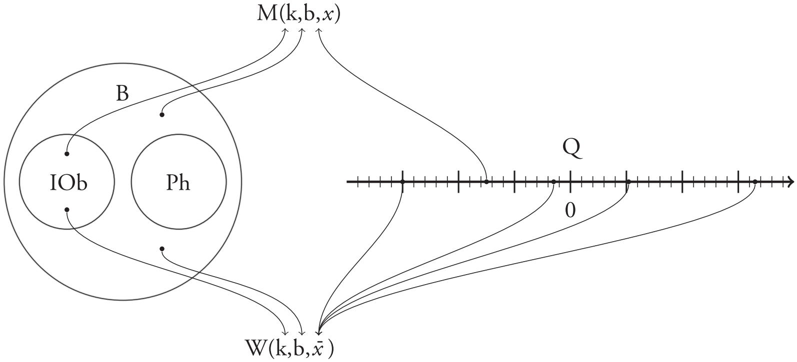
7 A már említett Hilbert és Tarski axiomatikus megközelítésmódja pont ebben különbözött: Hilbert másodrendben axiomatizálta a geometriát, amit így legfeljebb, csak mint halmazelméleti axiómarendszert lehet elsőrendűnek tekinteni, ami így elveszíti a jó logikai tulajdonságok (pl. az erős teljességi tétel, Löwenheim Skolem-tétel) jelentős részét. Tarski volt az, aki a geometriát elsőrendű axiómarendszerrel is képes volt megalapozni. Az elsőrendű logikai motivációkról bővebben lásd: Madarász–Németi–Székely 2006.

8 Goldblatt 1987 annyiban is érdekes, hogy ő is modális logikát alkalmazott az axiomatizálás során, habár egészen más módon, mint ami a továbbiakban itt szerepelni fog.

https://doi.org/10.54310/Elpis.2013.1.4

duumokból és nem tulajdonítanak számoknak tömeget. Az ilyen elméleteket kétszortú elméleteknek nevezik és lényegében mindössze abban különböznek a szokásos egyszortú elméletektől, hogy a szintaxisban különböző változójeleket (számoknak x, y, … , testeknek b, c, … változójeleket), a szemantikában pedig különböző univerzumot tartunk fenn a fizikai és a matematikai szort számára.

Mivel a kinematika nyelve része a dinamika nyelvének, az egyszerűség kedvéért egyből az utóbbi nyelvét (és modelljeit) mutatjuk be.



- A matematika szortja: (Q, +, · , ≤).
  - Feltesszük, hogy Q egy olyan rendezett test, amelyben pozitív számokból lehet gyököt vonni, tehát olyan (elsőrendben axiomatizált) számfogalomról van szó, amelyet középiskolában megismertünk. E számfogalom neve: *euklideszi test*.
- A fizika szortja: (*B, Ph, IOb*), ahol
  - *B* a testek (fizikai entitások) halmaza
  - *Ph*(*p*)*:* „*p* egy foton".
  - *IOb*(*k*)*:* „*k* egy nem gyorsuló megfigyelő". [9]
- A két szort közti kapcsolatot megteremtő predikátumok:
  - *W(k*, *b*, $\bar{x}$) a világképreláció: „*k* szerint a *b* az $\bar{x}$ téridő-pontban van". (*IOb*(*k*), azaz *k* nem gyorsuló megfigyelő).[10]

9 A nem gyorsuló megfigyelőket a fizikában inerciális megfigyelőnek szokás nevezni. Innen az *IOb* rövidítés is.

10 Az $\bar{x}$ pont igazából egy (t, x, y, z) koordinátanégyes: három tér-koordinátát tartalmaz (a háromdimenziós térnek megfelelően), és egy időkoordinátát, így ez összességében egy négydimenziós pont. A négy dimenzióhoz kevésbé szokott olvasónak így a világképreláció következő olvasatát ajánljuk: „*k* szerint a *b* a *t* időpontban az (x, z, y) helyen van".

https://doi.org/10.54310/Elpis.2013.1.4

– $M(k, b, x)$ a tömeg-reláció: „A k megfigyelő szerint a b test tömege x" (ahol $IOb(k)$). Továbbá kikötjük, hogy M függvényként viselkedjen: Egyazon megfigyelő ne tulajdonítson két különböző tömeget ugyanazon testnek.

Ezzel meghatároztuk a klasszikus dinamika, *SpecRelDyn* formális nyelvét. A matematikával szemben támasztott követelményekre mint az *AxEField* axiómára, a W-vel és az M-mel támasztott követelményekre pedig mint az *AxFrame* axiómára fogunk hivatkozni. Rátérünk a kinematika fizikailag legtartalmasabb axiómájára, a *fényaxiómára*.

2.2. Axiómák

2.2.1. Fényaxióma

Az egyszerűség kedvéért olyan mértékegységrendszert használunk, amelyben minden utat, időt és sebességet a fényhez mérünk. Ennek rögzítésével nyit a fényaxióma, amelyre majd gyakran csak az *AxPh* rövidítéssel hivatkozunk. Informális megfogalmazása a következő:

(1) Minden megfigyelő szerint a fény sebessége ugyanannyi, mégpedig 1.

(2) Minden irányban *lehetséges kiküldeni* egy fotont.

A formulák olvashatóbb felírásához a következő jelölésekre támaszkodunk: Egy négydimenziós $\bar{x}$ téridőpont időkomponensét $\bar{x}_t$-vel, a háromdimenziós térkomponensét pedig $\bar{x}_s$-sel jelöljük. Ezekkel kifejezhetjük a téridőpontok térbeli és időbeli távolságát is:

$$\text{Space}\,(\bar{x},\bar{y}) \stackrel{def.}{=} |\bar{x}_s - \bar{y}_s| \qquad \text{illetve} \qquad \text{Time}\,(\bar{x},\bar{y}) \stackrel{def.}{=} |\bar{x}_t - \bar{y}_t|.$$

Alkalmazzuk továbbá a szokásos formularövidítési konvenciókat:

$$(\forall x \in P)A \stackrel{def.}{\iff} \forall x(P(x) \rightarrow A), \qquad (\exists x \in P)A \stackrel{def.}{\iff} \exists x(P(x) \wedge A),$$

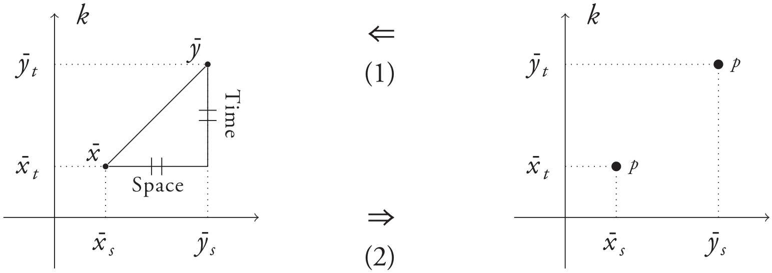
$$\forall \bar{x} A(\bar{x}) \stackrel{def.}{\iff} \forall x_1, x_2, \ldots, x_n\, A(x_1, \ldots, x_n).$$

Ekkor a „fényaxióma formális kifejtése", tehát a *fényaxióma* maga a következő formula:

$$(\forall k \in IOb)\forall \bar{x},\bar{y}\left(\frac{\text{Space}\,(\bar{x},\bar{y})}{\text{Time}\,(\bar{x},\bar{y})} = 1 \longleftrightarrow (\exists p \in Ph)(W(k,p,\bar{x}) \wedge W(k,p,\bar{y}))\right).$$

https://doi.org/10.54310/Elpis.2013.1.4

A formulában szereplő ekvivalencia két iránya az informális leírás 1. és 2. pontja, ezt illusztrálja a következő ábra:



Az ábra révén már felmerülhet a gyanú, hogy a fényaxióma és annak informális jellemzése nem teljesen fedi egymást. Az informális jellemzés 2-es pontjában az szerepel, hogy koordináták egy speciális konstellációja esetén *lehetséges* ezekben a pontokban ugyanazon foton előfordulása, míg a formula jobb oldala azt állítja, hogy *van* ezekben a pontokban egy foton.

E kettős beszéd feloldása, azaz hogy lehetségességről és létezésről szóló beszéd ilyen módon egybefolyjon, csak az lehet, hogy létezésen mindössze *lehetséges létezést* értünk, ugyanígy a fizikai testek fölötti kvantifikációra pedig mint lehetséges individuumok fölötti kvantifikációra gondolunk.[11]

Mindezt összegezve tehát az elmélet a lehetségességet, a modalitást az imént említett módon az egzisztenciális kvantorral fejezi ki, így a továbbiakban ennek megfelelően érdemes eleve a lehetséges individuumok fölötti kvantifikációként kiolvasni a kvantorokat.

De lássuk, mi köze a fényaxiómának a legfontosabb relativitáselméleti fogalmakhoz: az esemény fogalmához és a világképtranszformáció fogalmához.

2.2.2. *Eseményfogalom*

Elméletünkben számokról és lehetséges testekről szóló terminusok vannak, noha a relativitáselméletet tárgyaló klasszikus könyvek egyik leggyakoribb alapfogalma az *esemény*.

Ezt a kifejezést ebben az elméletben az előbbi fogalmakkal definiáljuk, mégpedig a következőképpen: Mivel lehetséges testekkel csak egy dolog történhet, ez pedig a különböző pontokban való észlelésük valamilyen lehetséges megfigyelő által, így a *k*

11 Világos, hogy a kvantifikáció aktualista értelmezése egyszerűen rossz: az fényaxiómából bármely téridőpontban végtelen sok foton *aktuális* létezése következne, tehát a téridő bármely pontja *végtelenül világos* lenne – ezt nyilván cáfolják a tapasztalataink.

https://doi.org/10.54310/Elpis.2013.1.4

lehetséges megfigyelő szerint az $\bar{x}$ pontban lévő eseményt úgy határozzuk meg, mint azon lehetséges testek halmazát, amelyek ott előfordulhatnak:

$$\mathrm{ev}_k(\bar{x}) \stackrel{def.}{=} \{b \in B : W(k, b, \bar{x})\}.$$

Tehát azon események különböznek, *amelyekben más történhet.*[12] Azok az események pedig, amelyekben ugyanaz történhet, kiemelt jelentőségűek a relativitáselméletben: az ilyen szituációk teremtik meg a kapcsolatot a különböző megfigyelők világképei között.

Azt a jelenséget, hogy egy k lehetséges megfigyelő ugyanazt az eseményt észleli egy $\bar{x}$ pontban, mint a h lehetséges megfigyelő egy $\bar{y}$ pontban, a következőképpen írhatjuk le az iménti definícióval:

$$\mathrm{ev}_k(\bar{x}) = \mathrm{ev}_h(\bar{y}).$$

Ennek az összefüggésnek a birtokában mondjuk azt, hogy $\bar{y}$ olyan pont, amelyben h láthatja azt, amit k láthatna $\bar{x}$-ben. Ez a világképtranszformáció: a fenti reláció fennállását $w_{kh}(\bar{x}, \bar{y})$-val rövidítjük.

A helyzet igen szerencsés. A fényaxiómából következik, hogy ilyen $\bar{y}$-ból csak egyetlen egy lehet. Szemléletesen szólva ez azt jelenti, hogy egy k lehetséges megfigyelő egy $\bar{x}$ helyen észlelt eseményének bármely más lehetséges megfigyelő is csak legfeljebb egy eseményt fog tulajdonítani, tehát mondhatjuk, hogy *azt* az eseményt látja, csak esetleg máshol. Ez matematikailag azt jelenti, hogy w_{kh} függvény, és a következő jelölésmód legitim: $\mathrm{w}_{kh}(\bar{x}) = \bar{y}$.

A fényaxióma azonban még többet biztosít; w_{kh} egy *egyértelmű* függvény: Különböző $\bar{x}$-ekhez különböző ilyen $\bar{y}$ fog tartozni. Szemléletesen ez annyit jelent, hogy h különbséget képes tenni mindazon események közt, amelyek közt k különbséget tudott tenni.

Felmerülhet a kérdés, hogy következik-e a fényaxiómából még az is (amit a speciális relativitáselméletben mindig fel szokás tenni), hogy a lehetséges megfigyelőknek nincsenek „privát eseményeik", azaz minden esemény egyaránt hozzáférhető minden lehetséges megfigyelő számára: ha k szerint egy bizonyos esemény történt az $\bar{x}$ pontban, akkor h is tud erről az eseményről és észleli ezt valamelyik $\bar{y}$ pontban. Tehát a kérdés matematikailag így hangzik: Igaz-e hogy a világképtranszformáció *kölcsönösen egyértelműen* felelteti meg a megfigyelők eseményeit egymásnak?

Az eddigiekből azonban ez nem következik. Ugyanakkor, mivel eseményen ilyen eseményfogalmat szeretnénk érteni, új axiómával rögzítjük azt, hogy ilyen értelemben szeretnénk használni az „esemény" kifejezést. Ez az *eseményaxióma*.

12 Ez egyébként a szokásos különbségtétele az esemény- illetve test-ontológiáknak. A lényegen nem változtat azonban az, ha a nyelvben egy eseményontológiának megfelelően a testek alapfogalmát eseményekre cseréljük. Formális részletekért lásd: Andréka–Madarász–Németi 2002, 786–825. o.

https://doi.org/10.54310/Elpis.2013.1.4

2.2.3. *Eseményaxióma*

AxEv: Az események minden lehetséges megfigyelő számára egyaránt hozzáférhetők:

$$(\forall k, h \in IOb)\forall \bar{x} \exists \bar{y}\ \mathrm{w}_{kh}(\bar{x}) = \bar{y}\,.$$

2.2.4. *Segédaxiómák*

Azért, hogy a koordinátarendszereinkkel úgy bánhassunk, ahogy azt megszoktuk, két további, koordinátarendszerekről (nem pedig fizikáról) szóló axiómát teszünk fel.
AxSelf: Minden megfigyelő a saját koordinátarendszerének középpontjában áll:

$$(\forall k \in IOb)\forall \bar{x}\ W(k, k, \bar{x}) \rightarrow \bar{x}_s = (0,0,0).$$

AxSym: A megfigyelők egy mértékegységrendszert használnak:

$$(\forall k, h \in IOb)\forall \bar{x}, \bar{x}', \bar{y}, \bar{y}' \begin{pmatrix} \mathrm{Time}(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \\ \mathrm{Time}(\bar{x}', \bar{y}') = 0 \\ \mathrm{w}_{kh}(\bar{x}) = \bar{x}' \\ \mathrm{w}_{kh}(\bar{y}) = \bar{y}' \end{pmatrix} \rightarrow \mathrm{Space}(\bar{x}, \bar{y}) = \mathrm{Space}(\bar{x}', \bar{y}')$$

Itt a jobb áttekinthetőség érdekében a konjunktív kapcsolatokat egymás alá sorolással jelöltük.

2.3. Tételek

Ezzel kész a kinematika axiómarendszere:

SpecRelKin = { *AxEField*, *AxFrame*, *AxPh*, *AxEv*, *AxSelf*, *AxSym* }

SpecRelKin-ben már bizonyíthatóak az alapvető relativisztikus effektusok. Két rövid definíció: Egy b test k megfigyelő szerinti *életútján* azon pontokat értjük, amelyeken k szerint b észlelhető:

$$\mathrm{wline}_k(b) \stackrel{def.}{=} \{\bar{x} : W(k, b, \bar{x})\}.$$

A h nem gyorsuló megfigyelő k szerinti *sebességvektorán* a következő ($\bar{x}$ és $\bar{y}$ választásától független) vektort értjük.

$$\bar{\mathrm{v}}_k(h) \stackrel{def.}{=} \frac{\bar{x}_s - \bar{y}_s}{\bar{x}_t - \bar{y}_t} \text{ ahol } \bar{x}, \bar{y} \in \mathrm{wline}_k(h).$$

https://doi.org/10.54310/Elpis.2013.1.4

A jól ismert „v=s/t" képletnek a következő felel meg:

$$|\bar{v}_k(h)| = \frac{\mathrm{Space}_k(\bar{x},\bar{y})}{\mathrm{Time}_k(\bar{x},\bar{y})} \text{ ahol } \bar{x},\bar{y} \in \mathrm{wline}_k(h).$$

A most következő relativisztikus effektusok formális megfelelői nem mindig triviálisak, óva intjük tehát az Olvasót attól, hogy mindössze a formulák kiolvasása miatt felhagyjon a továbbiak elolvasásával; ezeket az elsőrendű axiomatikus felépítés jegyében mellékeltük, a továbbiakban nem lesz szükség komplikált formulák kiolvasására.[13]

- Az események időbeli sorrendje megfigyelőfüggő:

$$(\forall k,h \in IOb)|\bar{v}_k(h)| \neq 0 \rightarrow \exists \bar{x},\bar{y} \begin{pmatrix} \bar{x}_t > \bar{y}_t \\ \mathrm{w}_{kh}(\bar{x})_t < \mathrm{w}_{kh}(\bar{y})_t \end{pmatrix}.$$

- Mozgó órák kiállnak a szinkronból:

$$(\forall k,h,h' \in IOb)\forall \bar{x},\bar{x}' \begin{pmatrix} W(k,h,\bar{x}) \\ W(k,h',\bar{x}') \\ \bar{x}_t = \bar{x}'_t \end{pmatrix} \rightarrow \mathrm{w}_{kh'}(\bar{x}')_t = \mathrm{w}_{kh}(\bar{x})_t - |\bar{v}_k(h)| \cdot |\mathrm{w}_{kh}(\bar{x}')_s|.$$

- Mozgó órák lelassulnak:

$$(\forall k,h \in IOb)\forall \bar{x},\bar{y} \left(\begin{pmatrix} W(k,h,\bar{x}) \\ W(k,h,\bar{y}) \end{pmatrix} \rightarrow \mathrm{Time}_k(\bar{x},\bar{y}) = \frac{\mathrm{Time}_h(\mathrm{w}_{kh}(\bar{x}),\mathrm{w}_{kh}(\bar{y}))}{\sqrt{1-\bar{v}_k(h)^2}} \right).$$

- Mozgó méterrudak megrövidülnek:

$$(\forall k,h,h' \in IOb)\forall \bar{x},\bar{y} \begin{pmatrix} W(k,h,\bar{x}) \\ W(k,h',\bar{y}) \\ \bar{x}_t = \bar{y}_t \end{pmatrix} \rightarrow \mathrm{Space}_k(\bar{x},\bar{y}) = \mathrm{Space}_h(\mathrm{w}_{kh}(\bar{x}),\mathrm{w}_{kh}(\bar{y})) \cdot \sqrt{1-\bar{v}_k(h)^2}.$$

- Minden *megfigyelő* lassabb a fénynél:[14]

$$(\forall k,h \in IOb)|\bar{v}_k(h)| < 1.$$

13 Ha mégis érdeklődést keltettünk a formalizmussal, úgy egy didaktikus, ábrákkal tarkított bizonyítást ajánlunk: Andréka–Madarász–Németi 2007, 624–638. o.

14 Fontos megjegyezni, hogy a tétel csak megfigyelőkre vonatkozik, így *SpecRelKin* nincs kiszolgáltatva az olyan empirikus eredményeknek, amelyek fénynél gyorsabb testekről számolnak be – egészen addig amíg ezekről be nem bizonyosodik, hogy képesek legalább három dimenzióban koordinátázni a környezetüket. Részletekért lásd: Székely 2012.

https://doi.org/10.54310/Elpis.2013.1.4

2.4. A dinamika előkészítése

A kinematika axiomatizálását ezzel lezártnak tekinthetjük. Mégis a dinamika tárgyalásához szükség lesz olyan kinematikai axióma bevezetésére, amelyre eddig nem volt szükség. Ez a megfigyelőküldési axióma.

2.4.1. A megfigyelő-küldés axiómája

AxIObExp: Minden lehetséges megfigyelő tetszőleges irányban és fénynél lassabb sebességgel *képes útnak indítani* egy lehetséges megfigyelőt úgy, hogy annak órája „előre" járjon:

$$(\forall k \in IOb)\forall \bar{x}, \bar{y} \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{Space}(\bar{x},\bar{y})}{\mathrm{Time}(\bar{x},\bar{y})} < 1 \\ \bar{x}_t < \bar{y}_t \end{pmatrix} \rightarrow (\exists h \in IOb) \begin{pmatrix} \bar{x}, \bar{y} \in \mathrm{wline}_k(h) \\ \mathrm{w}_{kh}(\bar{x})_t \leq \mathrm{w}_{kh}(\bar{y})_t \end{pmatrix}.$$

Felhívjuk a figyelmet a fényaxiómával való hasonlóságra: A fényaxióma azt posztulálja, hogy fényjelek *küldhetők el*, a gondolatkísérleti axióma pedig azt, hogy megfigyelők *küldhetők el*.

2.4.2. Ütközések

A fontosabb dinamikai axiómákhoz szükség lesz az ütközés fogalmára. A most bemutatásra kerülő ütközésfogalom rendkívül egyszerű lesz: csak rugalmatlan ütközéseket definiálunk (tehát ahol az ütköző testek az ütközés után „összetapadnak"), és ezen rugalmatlan ütközések kapcsán is csak azokról ejtünk szót, ahol mindössze két test ütközik.[15]

Az ütközés fogalmára *kinematikai* definíciót adunk, azaz egyedül azt vesszük számításba az ütközés meghatározásához, hogy az „hogy néz ki" az azt megfigyelők számára. A rugalmatlan ütközés definíciója ezért: Rugalmatlan ütközés van ott, ahol két életút véget ér és egy elkezdődik.

$$\mathrm{inecoll}_{k,\bar{x}}(b, c : d) \overset{def.}{\Longleftrightarrow} \begin{pmatrix} b \neq c \\ \mathrm{in}_k(\bar{x}) = \{b, c\} \\ \mathrm{out}_k(\bar{x}) = \{d\} \end{pmatrix},$$

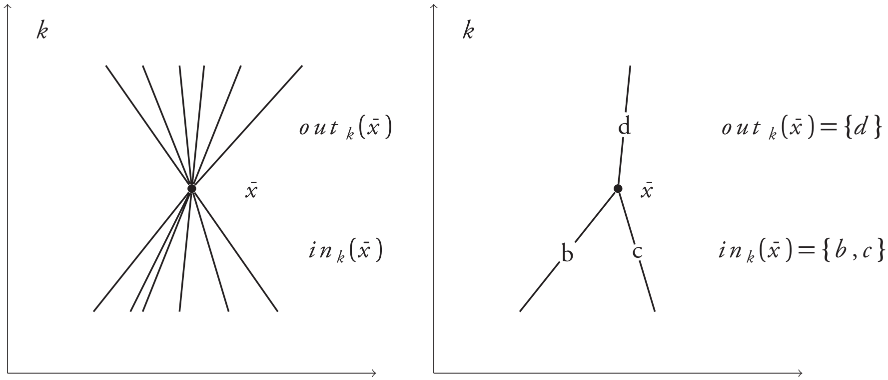
ahol

15 Lehetséges azonban mindezt tetszőleges tényezőjű rugalmas ütközésre is általánosítani, lásd Székely 2009, 34–55. o.

https://doi.org/10.54310/Elpis.2013.1.4

$$\mathrm{in}_k(\bar{x}) \stackrel{def.}{=} \{b \in B : b \in \mathrm{ev}_k(\bar{x}) \wedge (\forall \bar{y} \in \mathrm{wline}_k(b))\, \bar{y}_t < \bar{x}_t \vee \bar{y} = \bar{x}\},$$

$$\mathrm{out}_k(\bar{x}) \stackrel{def.}{=} \{b \in B : b \in \mathrm{ev}_k(\bar{x}) \wedge (\forall \bar{y} \in \mathrm{wline}_k(b))\, \bar{y}_t > \bar{x}_t \vee \bar{y} = \bar{x}\}.$$



Az ütközések definíciójából rögtön következik egy látszólag teljesen intuitív tulajdonságuk: két különböző ütközés nem lehet jelen egy és ugyanazon helyen. Emlékezzünk azonban vissza arra, hogy a fényaxióma (és hasonlóképpen a megfigyelőküldési axióma) plauzibilitását úgy tartottuk fenn, hogy azt mondtuk: testeken *lehetséges* testeket értünk. Ekkor viszont ütközéseiken már kénytelenek vagyunk lehetséges ütközéseket érteni. Az az intuíció viszont, hogy egy pontban csak egy ütközés történhet, *aktuális* ütközésekre vonatkozó intuíció. Azonban az aktualitással kapcsolatos fogalmakról már az axiómarendszer tárgyalásának legelején lemondtunk.

Minden amellett szól, hogy válaszúthoz érkeztünk. Míg a fényaxióma ebben a formájában csak potenciális fizikai individuumokkal, addig az ütközésdefiníció csak aktuális individuumokkal értelmes. Tartsuk-e magunkat a potenciális beszédmódhoz, és nézzünk új ütközésdefiníció után, vagy reformáljuk meg az egész axiómarendszert? Mivel elég reménytelen csak aktuális fizikai individuumokkal leírni a relativitáselméletet, és aktuális és potenciális közötti természetes különbségtétel csak modális logikai keretek közt lehetséges, a kérdés megválaszolása egyben a következő kérdés megválaszolását is jelenti: Maradjunk-e a klasszikus logikában, vagy térjünk át a modális logika használatára?

A klasszikus logikában mindez továbbfolytatható, ha feladjuk azt, hogy az ütközések definíciójában csak kinematikai terminusokat szerepeltetünk. Azaz lemondunk arról, hogy egy ütközést pusztán az határoz meg, hogy a benne résztvevő testek hogyan mozognak.[16]

Ezzel együtt olyan tudományfilozófiai opciókról is le kell tehát mondanunk, amelyek ilyen definíciókkal dolgoznak, például a tömeg *operacionális* definíciójáról. Ennek

16 lásd például Madarász–Székely 2012, 21. o. Bár ennek a megoldásnak egy szépséghibája, hogy axiómát épít a definícióba.

jelen formalizált keretek közt az felelne meg, ha az *M* predikátumot csak *W* predikátumra, valamilyen kitüntetett testre vagy testtípusra (*etalonra vagy etalonokra*), és egy *kísérletvégzésnek* megfelelő formális operációra redukálhatnánk.

A továbbiakban ezért azt fogjuk bemutatni, hogy

- a modális logika alkalmazásával gyakorlatilag minimális változtatással plauzibilis módon kifejezhető és összhangba hozható az aktualitás és potencialitás – mindezt ráadásul úgy, hogy a klasszikusan kifejtett *SpecRelKin* minden tétele *szisztematikus* módon átörökíthető.[17]
- Megőrízve azt, hogy az ütközés definíciója nem használ tömeggel kapcsolatos fogalmakat, alkalmunk nyílik egy erősebb modális logika alkalmazásával *operacionális* módon definiálni a tömeget.

3. Modális speciális relativitáselmélet

3.1. Modális logikai alapfogalmak

Egy modális szemantikához a lehetségességnek mindig a következő két típusa társul:[18]

1. Egy állítás pontosan akkor lehetséges, ha van olyan lehetséges világ, amely megvalósítja.
2. Egy állítás pontosan akkor lehetséges, ha van olyan lehetséges világ, amely megvalósítja, és amely az aktuális világból valamilyen értelemben hozzáférhető.

Egy modális logikai keret megadása tehát rendre a következő fogalmak megadását jelenti:

1. Mi egy lehetséges világ?
2. Mi a lehetséges világok közötti alternatívareláció?

Lehetséges világon majdnem pontosan ugyanazt fogjuk érteni, mint eddig modellen: egy elsőrendű modellt. Azonban nem klasszikus logikai modelleket, hanem ún. *szabad logikai modelleket*. A különbség mindössze az, hogy míg az elsőrendű logikában

17 Ugyanígy átörökíthetők a potencialitás és aktualitás problémáját ignoráló (de különös módon a megfelelő tételeket reprodukáló) klasszikus dinamikai axiómarendszer tételei is a bemutatásra kerülő modális dinamikába is. A klasszikus dinamikai axiómarendszer megtalálható Andréka–Madarász–Németi–Székely 2008 cikkében illetve Székely 2009 34–55. oldalán.

18 A kettő meg nem különböztetése az, amit logikai szükségszerűségnek lehet hívni, és amely szemantika nem más, mint egy, a klasszikus logika alternatív szemantikája. Tehát a modalitások használatának értelmét a két értelmezés megkülönböztetése adja.

https://doi.org/10.54310/Elpis.2013.1.4

pontosan azon individuumok léteznek, amelyekre referálni is lehet, a szabad logikában a létező és a referálható individuumok megkülönböztetnek: a létező individuumok körét nevezik kvantifikációs tartománynak, a referálható individuumok körét pedig diskurzustartománynak. Élünk továbbá azzal a természetes kikötéssel, hogy minden létezőre lehetséges referálni, azaz a diskurzustartomány tartalmazza a kvantifikációs tartományt.

Logikai vonzata ennek mindössze annyi, hogy a behelyettesítési szabályt a létezőkre korlátozzuk: Az $\forall b\varphi(b) \rightarrow \varphi(t/b)$ axiómát $\forall c\forall b\varphi(b) \rightarrow \varphi(c/b)$-re cseréljük.[19]

Egy modális logika megalkotásához célszerű egy szemléletes alternatívarelációt felmutatni. Egy ilyen jelöltért mindössze a problémákat kiváltó fényaxióma és gondolatkísérleti axióma informális jellemzését kell felidéznünk:

- *AxPh* „ … Minden irányban lehetséges kiküldeni legalább egy fotont."
- *AxIObExp* „ … képes útnak indítani egy lehetséges megfigyelőt …"

Ezek aktív cselekvéseket írnak le, mégpedig a fizikára jellemző kísérletezéssel kapcsolatos cselekvéseket. Mivel egy ilyen axiómarendszer működtetése, a tételek levezetése nem igényli valódi fotonok kiküldését, megkockáztathatjuk, hogy *gondolatkísérlet-végzésről* szólnak.[20] Innen adódik az alternatívareláció és a modális operátorok szándékolt jelentése:

- Egy w lehetséges világból *elérhető* a v lehetséges világ, ha v olyan világ, amely w-ből előállítható valamilyen gondolatkísérlet segítségével.
- $\Diamond\varphi$ akkor igaz, ha elvégezhető olyan gondolatkísérlet, amely φ-t igazzá teszi. $\Box\varphi$ akkor igaz, ha bármely gondolatkísérlet igazzá teszi φ-t, azaz lehetetlen olyan gondolatkísérlet elvégzése, amely φ-t hamissá tenné.[21]

19 Annak kimutatására, hogy a diskurzustartomány és a kvantifikációs tartomány kapcsolatát ez a szabály hogyan befolyásolja, a következő klasszikus példa megvilágító erejű: Legyen $\varphi(b)$: „Ha b ló, akkor b szárnyatlan" és c: „Pegazus". Ha „Pegazus" jelölete egy nemlétező szárnyas ló, úgy a klasszikus logikai axióma sérül, míg a szabad logikai axióma érvényben marad, hiszen Pegazus minden más nemlétező szárnyas lóval egyetemben kívül esik a $\forall c$ miatt átvizsgált individuumok körén, a kvantifikációs tartományon. Ez a példa arról is árulkodik, hogy a szabad logika modális logikától független alkalmazása általában a viselő nélküli nevekhez kapcsolódik.

20 Megjegyezzük, hogy tágabb értelemben véve a egy axiómarendszer működtetéséhez az is hozzátartozik, hogy az általa levezetett tételeket empirikusan is ellenőrizni kell. Most csak a formális értelemben vett működtetésre gondolunk, azonban természetesen ez az axiómarendszer sem mentes az empirikus behatásoktól. Pontosan azért használjuk ezeket az axiómákat, mert kísérletileg is jól alátámasztottak: a fényaxiómát például a híres Michelson–Morley kísérlet konfirmálja.

21 Felmerülhet a gyanú, hogy körkörösséggel állunk szemben, mert egy fizikai gondolatkísérlet általában nem jelent mást, mint hogy megvizsgáljuk, hogy a vizsgált fizikai elmélet törvényei szerint mi lehetséges. A gondolatkísérletek ezen modellelméleti értelmezése tehát már feltételezi a fizikai törvények meglétét, itt ugyanakkor bizonyos fizikai törvények meghatározásában használni fogjuk a gondolatkísérletek fogalmát.

Körkörösségről azonban szó sincs: továbbra is joggal feltehető lesz majd *modellelméleti* szinten a kérdés, hogy mit engednek meg a(z akár modális) fizikai törvények. Ilyenkor pontosan azt az állítást tekintjük majd lehetségesnek, amelynek lesz az axiómarendszert is kielégítő modellje. Azonban a fizikai érve-

https://doi.org/10.54310/Elpis.2013.1.4

Most, hogy világos, milyen koncepcióra van szükségünk, újabb döntések meghozatala vár ránk: Milyen relációs tulajdonságok jellemeznek egy ilyen alternatívarelációt? Például legyen-e

- *Reflexív?* Gondolatkísérlet-e az is, amikor az aktuális világon semmit nem változtatunk?
- *Tranzitív?* Két gondolatkísérlet egymás után fűzése is egy gondolatkísérlet?
- *Szimmetrikus?* A gondolatkísérletek visszafelé is elvégezhetők?
- *Definitív?* Mindig el lehet végezni legalább egy gondolatkísérletet?

E kérdésekre a következő válaszokat előlegezzük meg:

- A relativitáselmélet fontosabb tételeinek bebizonyításához az alternatívareláció egyik fent említett tulajdonságára sincs feltétlen szükség. Ezt a minimális normális modális logika egymaga képes véghez vinni.
- Hogy azt bizonyítsuk, hogy a klasszikus dinamika és kinematika axiómarendszere által előállított tételek modális megfelelői kivétel nélkül levezethetőek a megfelelő modális axiómarendszerekben is, érdemes (noha nem szükséges) feltenni a tranzitivitást.
- A reflexivitás kapcsán semlegesek maradunk – ha az olvasónak hiányozna ez a tulajdonság, megnyugtatjuk: tetszőleges modális logikában kifejezhető a modális operátor reflexív alternatívarelációval járó megfelelője, ez lenne az a logikai operátor, amelyet a $\varphi \wedge \Box\varphi$ formulával fejezhetünk ki. A modális operátornak ezt a reflexív lezárását a továbbiakban a modális szimbólumban elhelyezett ponttal rövidítjük.
- A definitivitás következménye lesz az experimentális axiómáknak: a fényaxiómának és a gondolatkísérleti axiómának.
- A szimmetria előírását kifejezetten elutasítjuk.[22] Ennek oka abban áll, hogy gondolatkísérletekként nem fogunk az összes gondolatkísérletre támaszkodni, mindössze

lésekben, bizonyításokban használt metaelméleti modelltranszformációs szabályok (gondolatkísérletek) egy részét *szintaktikai és szemantikai* szinten is megragadjuk: erre hivatott a $\Diamond$ szimbólum és a szemantikáját megadó alternatívareláció, amelyek jelentését azonban *axiomatizáljuk*. Tehát a $\Diamond$ szemantikájában *nem* olyan axiómarendszer modelljeire hivatkozunk, amely axiómarendszerben a $\Diamond$ maga is előfordul, azaz a gondolatkísérletek modellelméleti értelmezéséről, és így körkörösségről szó sincs.

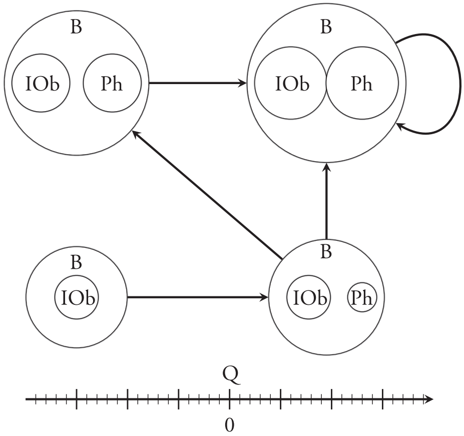
Tehát a „gondolatkísérlet" kifejezés esetünkben több jelentéssel is bír: egy szintaktikaival ($\Diamond$), egy hozzá kapcsolódó szemantikaival (alternatívareláció), és egy modellelméletivel. A közös elnevezés természetesen nem véletlen: az első kettőt úgy axiómatizáljuk, hogy a klasszikus axiómarendszerre alkalmazott modellelméleti fogalomra „emlékeztessen". A modális logika formális értelemben vett célja tehát az, hogy olyan modelleket határozzon meg, amelyek bizonyos klasszikus logikai modelltranszformációk (gondolatkísérletek) leírásának feleltethetők meg. A modelltranszformációk összességét jelképezi az alternatívareláció, amely pedig a $\Diamond$ operátorral axiómatizálható. Ebben (és csak ebben) az értelemben feleltethető meg az általunk használt és a modellelméleti gondolatkísérlet fogalma. A továbbiakban a gondolatkísérlet fogalmát csak a modális értelemben fogjuk használni.

22 Ez természetesen nem jelenti a szimmetrikus viszonyok tiltását. Mindössze nem állítjuk, hogy minden gondolatkísérlet fordítottjára is szükségünk van.

https://doi.org/10.54310/Elpis.2013.1.4

azokra, amelyek új fizikai entitások felvételével járnak (például a fényjel- és megfigyelőküldés), olyanokra nem, amelyek fizikai entitások *törlésével* járnak. Márpedig ha a reláció szimmetrikus, akkor az egyik maga után vonja a másikat.

3.2. Modális nyelv és Kripke-szemantika



- A matematika szortja: (Q, +, · , ≤), amelytől továbbra is azt várjuk el, hogy euklideszi test legyen.
- A fizika szortja (S, R, B, Ph, IOb), ahol
  - S a lehetséges világok, vagy téridők (neveinek) halmaza.
  - R egy S-en értelmezett elérhetőségi reláció, amely akkor áll majd fönn egy w és egy v világ közt, ha v megkapható a w-ből egy gondolatkísérlet által.
  - B_w az *aktuálisan létező* fizikai entitások halmaza a w világban.
  - $Ph_w(p)$: „p egy foton a w világban."
  - $IOb_w(k)$: „k egy nem gyorsuló megfigyelő a w világban."
- A két szort közti kapcsolatot megteremtő predikátumok:
- $W_w(k, b, \bar{x})$ a világképreláció: „k szerint a b test az $\bar{x}$ téridő-pontban van a w világban", ahol $IOb_w(k)$.
- $M_w(k, b, \bar{x})$ a tömeg-reláció: „A k megfigyelő szerint a b test tömege $\bar{x}$ a w világban", ahol $IOb_w(k)$, Továbbá kikötjük, hogy M egy függvény.

Ezzel meghatározottnak tekinthetjük *ModSpecRelDyn* nyelvét. Mint a klasszikus esetben, a matematikai követelményekre mint az *AxEField*-re*,* a W-vel és az M-mel támasztott követelményekre pedig mint az *AxFrame* axiómára fogunk hivatkozni.Azonban (egyelőre) szigorú kereteket szabunk arra vonatkozólag, hogy mennyire módosulhatnak a predikátumok extenziói a gondolatkísérletek során.

3.3. Gondolatkísérletek meghatározása

A relativitáselmélet tárgyalásához nem szorítkozunk azonban az *összes* lehetséges gondolatkísérletre, mindössze ezeknek csak egy igen szűk részére. Hogy pontosan melyik nagyon szűk részére, azt a következőképpen határoljuk körül: Olyan gondolatkísérletekre van csak szükségünk, amelyekre igazak az alábbiak.

- Esszenciális tulajdonságnak tekintik a *Ph* és *IOb* predikátumokat: egy foton mindig is foton marad, és egy megfigyelő, amely képes volt koordinátázni, nem veszti el ezen gondolatkísérletek során ezt a képességét. Formálisan:

$$\forall k\ IOb\,(k) \rightarrow \Box\ IOb\,(k)$$
$$\forall p\ Ph\,(p) \rightarrow \Box\ Ph\,(p).$$

- Számolási eredményeinket nem befolyásolják. Tehát matematikai formulákra igaz a következő:

$$\mu \leftrightarrow \Box\, \mu\ .$$

- A tömeget esszenciális tulajdonságként kezelik – azaz kijelentjük, hogy a gondolatkísérletek során sosem fogunk egy tömegen önkényesen változtatni:

$$\forall k\ b\ x\ \ M(k, b, x) \rightarrow \Box\ M(k, b, x).$$

- A személyes azonosságot nem sértik, azaz a terminusok merev jelölők: A különböző fizikai entitásokat továbbra is különbözőknek fogjuk tekinteni, míg az azonosakat később sem fogjuk megkülönböztetni:

$$t \neq s \rightarrow \Box\ t \neq s$$
$$t = s \rightarrow \Box\ t = s.$$

- Alkalmazása során csak nőhet a létező entitások univerzuma. Fényjeleket, megfigyelőket küldünk, de ezáltal a létezésből senkit ki nem taszítunk. A kvantifikációs tartomány tehát az alternatívareláció mentén sosem csökkenhet; vagy nő, vagy marad változatlan.[23]

$$\forall b\ \ B(b) \rightarrow \Box\ B(b).$$

23 Ez maga után vonja a látszólag logikai állítást kifejező Barcan-formula *konverzének* érvényességét:
$$\exists x\, \Diamond A \rightarrow \Diamond \exists x\, A \qquad \Box \forall x\, A \rightarrow \forall x\, \Box A$$

https://doi.org/10.54310/Elpis.2013.1.4

- Nem változtatnak létezők életútjain: ha elhelyeztünk egy testet egy életúton, akkor mindörökké ott tartjuk. Úgy is fogalmazhatnánk, hogy a „mi lett volna ha" jellegű kérdésekkel az életútmegadásokkal kapcsolatban nem foglalkozunk.

$$\forall k\, b\, \bar{x} \quad W(k, b, \bar{x}) \rightarrow \quad \Box\, W(k, b, \bar{x})$$
$$\forall k\, b\, \bar{x} \;\; \neg W(k, b, \bar{x}) \rightarrow \Box \neg\, W(k, b, \bar{x}).$$

Ezen modális formulák konjunkciójára *AxModFrame*-ként fogunk hivatkozni. Mindezen megszorítások mellett úgy gondoljuk azonban, hogy a modális logika ereje abban áll, hogy benne a predikátumok szabadon, akár teljesen meg is változhatnak. Éppen ezért írásunk végén felvázolunk majd egy olyan modális logikai elméletet, amely ezt a *W* világkép-predikátumot szinte teljesen szabadjára engedi, és be is mutatjuk, hogy ez az erő szükséges és elégséges lehet ahhoz, hogy a tömeg operacionális definícióját megadhassuk.

Egy igen fontos megjegyzés: Az itt körvonalazott modális logika ún. erős teljességi tétellel bír, azaz a klasszikus logikához hasonlóan továbbra is feltehetjük, hogy a szemantikai érvelést bármikor szintaktikai érveléssé alakíthatjuk, azaz a modális elsőrendű nyelven folytatott szemantikai gondolatmenetek *axiomatizálhatóak*.[24]

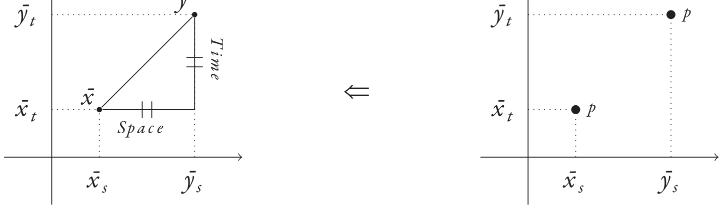
3.4. Modális kinematikai axiómák

3.4.1. A fényészlelés axiómája

A klasszikus *AxPh*-ból indulunk ki. Ennek az a része, amely a fotonok észleléséről szólt, plauzibilis a modális keretek közt is, így ez lesz a fényészlelés axiómája.

AxPhObs: Minden megfigyelő a fotonok sebességét ugyanannyinak, mégpedig 1-nek méri:

$$(\forall k \in IOb)\forall \bar{x}, \bar{y} \left(\frac{\mathrm{Space}\ (\bar{x}, \bar{y})}{\mathrm{Time}\ (\bar{x}, \bar{y})} = 1 \leftarrow (\exists p \in Ph)(\bar{x}, \bar{y} \in \mathrm{wline}_k(p)) \right).$$



24 Teljességi tételekért lásd: Corsi 2002, 1498-1503 vagy magyar nyelven Ruzsa 1988, 381–411. o. Ugyanitt Ruzsa Imre kiváló bevezetést nyújt az elsőrendű modális logikába általában is.

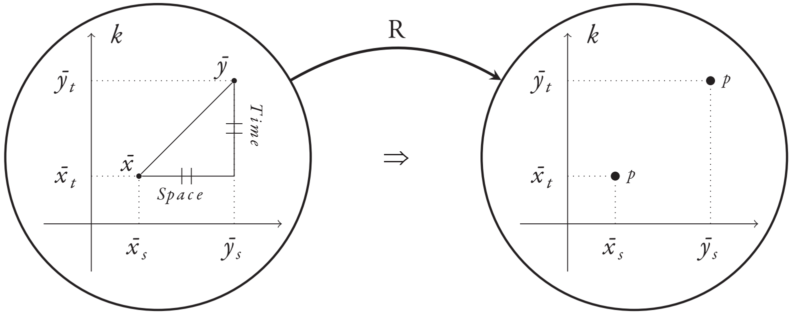
https://doi.org/10.54310/Elpis.2013.1.4

3.4.2 A fényjelküldés axiómája

Modális logikai eszközöket mindössze az ekvivalencia másik iránya igényel. Ezt korrigáljuk most egy modális operátorral, hogy megkapjuk a fényjelküldés axiómáját.

AxPhExp: Minden irányban lehetséges kiküldeni egy fényjelet:

$$(\forall k \in IOb)\forall \bar{x},\bar{y}\left(\frac{\text{Space}\;(\bar{x},\bar{y})}{\text{Time}\;(\bar{x},\bar{y})}=1 \to \Diamond(\exists p \in Ph)(\bar{x},\bar{y} \in \text{wline}_k(p))\right).$$



3.4.3 Eseményaxióma

Ha a kvantorok már csak aktuális létezőkre vonatkoznak, úgy a világképtranszformáció klasszikus képlete már nem határoz meg függvényt. Például ha a téridőben mindössze két test, *b* és *c* kóborol, akkor minden pontban legfeljebb a következő négy esemény valamelyikét lehet észlelni: (1) *b* és *c* ott találkoztak, (2) csak *b* járt ott, (3) csak *c* járt ott, (4) nem fordult ott elő egyetlen egy test sem. És mivel az események száma az ilyen helyzetekben meg sem közelíti a négydimenziós téridő különböző pontjainak számát, a régi definíciónak esélye sincs függvényt definiálni.

A klasszikus kinematikában ez a probléma *AxPh* miatt nem volt jelen, mivel az minden pontba különböző lehetséges fotont biztosított. *AxPh* szükséges részét azonban *AxPhExp*-re általánosítottuk, így már nincsenek kvantorokkal elérhető fotonjaink – vannak azonban *modális operátorral és kvantorral* elérhető fotonjaink, ugyanis azokat *AxPhExp* a rákövetkező világokban már biztosítja. Lényegében így lehetne megadni a heurisztikát ahhoz, hogy a következő definíció jó lesz ahhoz, hogy visszanyerjük a világképek közt kapcsolatot teremtő világképtranszformációt:

$$\mathrm{w}_{kh}(\bar{x})=\bar{y} \overset{def.}{\iff} \boxdot\,\mathrm{ev}_k(\bar{x})=\mathrm{ev}_h(\bar{y}).$$

https://doi.org/10.54310/Elpis.2013.1.4

Ez informálisan tehát azt fejezi ki, hogy két megfigyelő két koordinátapontját akkor felelteti meg egymásnak a w_{kh} világképtranszformáció, ha a megfigyelők ezen pontokban megfigyelt eseményei közt nem lehet gondolatkísérlettel különbséget tenni.

Természetesen a klasszikus elmélethez hasonlóan e függvény totális és szürjektív voltát még egy, erre a definícióra épített eseményaxiómával biztosítani kell:

AxModEv: A megfigyelőknek nem lehetnek „privát" eseményeik, azaz a világképtranszformáció egy kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés.[25]

$$(\forall k, h \in IOb)\ \forall \bar{x}\ \exists \bar{y}\ \mathrm{w}_{kh}(\bar{x}) = \bar{y}\ .$$

3.4.4. Segédaxiómák

Ismét ott tartunk, hogy a koordinátarendszereink megregulázásáért segédaxiómákat érdemes posztulálni. Ezeken nem kell lényegében változtatni – azt az egyet leszámítva, hogy mértékegységrendszerekről szóló axiómánál immár az új világképtranszformáció-fogalmat kell használni, így annak új nevet adunk: *AxModSym*.

3.5. A modális kinematika tételei

Vegyük a gondolatkísérleti axiómákhoz hozzá következő axiómarendszert:

ModSpecRelKin = { *AxEField*, *AxFrame*, *AxModFrame*, *AxPhObs*, *AxPhExp*, *AxModEv*, *AxSelf*, *AxModSym* }

Ebben az axiómarendszerben tetszőleges normális modális logikai eszközökkel (tehát az alternatívareláció egyetlen speciális tulajdonságát sem feltéve) bizonyíthatóak a speciális relativitáselmélet alapvető predikciói:

- Az események időbeli sorrendje megfigyelőfüggő.
- Mozgó órák kiesnek a szinkronból.
- Mozgó órák lelassulnak.
- Mozgó méterrudak megrövidülnek.
- Nincs gyorsabb megfigyelő a fénynél.

25 Igaz a klasszikus *AxEv* átfogalmazása is: A *lehetséges események* mindenki számára azonosak, ahol lehetséges eseményeken *lehetséges* testek halmazát értjük. Érdekes módon ez az állítás nem fogalmazható meg az elsőrendű modális logikában, csak annak szemantikájában, mivel a kvantorral ellentétben modális operátor nem köt változót. Ugyanakkor nem nehéz belátni, hogy a fenti axióma ezt kikényszeríti. Visszafele ez azonban már nem igaz. Mivel pedig ez a megfogalmazhatatlan állítás tűnik az *AxEv* megfelelőjének, ezért az itt megfogalmazott eseményaxióma *erősebb*.

https://doi.org/10.54310/Elpis.2013.1.4

A formulák majdnem teljesen megfelelnek a *SpecRelKin*-ből ismert formuláknak, mindössze a világképtranszformáció fogalmát kell a modalizált változatra kicserélni.

Az azonban, hogy a relativisztikus effektusokat és néhány alapvető predikciót bebizonyít *ModSpecRelKin*, még nem bizonyíték arra vonatkozóan, hogy a miénkkel párhuzamos klasszikus *SpecRelKin*-ben végzett bizonyítások *általában is* megvalósíthatók *ModSpecRelKin*-ben is. Ez azonban bizonyítható egy *SpecRelKin* nyelvéből *ModSpecRelKin* nyelvére való fordítás segítségével.

A klasszikus *SpecRelKin* nyelvét fordítsuk le a következő módon *ModSpecRelKin* nyelvébe:

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(A) &\stackrel{def.}{=} A & \mathrm{Tr}(\exists x\,\varphi) &\stackrel{def.}{=} \exists x\,\mathrm{Tr}(\varphi) \\ \mathrm{Tr}(\neg\varphi) &\stackrel{def.}{=} \neg\mathrm{Tr}(\varphi) & \mathrm{Tr}(\exists b\,\varphi) &\stackrel{def.}{=} \diamonddot\exists b\,\mathrm{Tr}(\varphi) = \\ \mathrm{Tr}(\varphi\to\psi) &\stackrel{def.}{=} \mathrm{Tr}(\varphi)\to\mathrm{Tr}(\psi) & &= \Diamond\exists b\,\mathrm{Tr}(\varphi)\vee\exists b\,\mathrm{Tr}(\varphi). \end{aligned}$$

Itt A atomi formulát jelöl. Ebből a fordításból következik az is, hogy az univerzális kvantorokat a nekik megfelelő modális operátorral fordítja:

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(\forall b\,\varphi) &= \boxdot\forall b\,\mathrm{Tr}(\varphi) \\ &= \Box\forall b\,\mathrm{Tr}(\varphi)\wedge\forall b\,\mathrm{Tr}(\varphi). \end{aligned}$$

A fordítást ugyanaz motiválja, ami miatt modális logikára váltottuk a klasszikus logikát. Mivel (modális nézőpontból nézve) a klasszikus logika csak lehetséges individuumok fölött képes kvantifikálni, így az aktuális individuumok fölött kvantifikáló kvantorokat modális operátorokkal szükséges ellátni ahhoz, hogy itt is a lehetséges individuumok feletti kvantifikációt fejezhessék ki.

Ha sikerülne belátni azt, hogy a fordítás után *SpecRelKin* minden logikai, matematikai, fizikai és keretelméleti axiómája *ModSpecRelKin*-beli tétellé válik, továbbá hogy *SpecRelKin* logikai következtetései *ModSpecRelKin*-ben is érvényes következtetési szabályok, úgy biztossá válik az is, hogy minden *SpecRelKin*-beli tétel Tr szerinti fordítása *ModSpecRelKin*-beli tétel is. Ennek az igazolása fantázia nélküli papírmunka, egy axióma híján mindegyik triviális levezetés. Ennek az axiómának a fordítása azonban sajnálatos vagy szerencsés módon (attól függően hogy a fordítás sikere, vagy a modális nyelv kifejezőereje imponál-e nekünk) nem tétele *ModSpecRelKin*-nek.

Ezt az egyetlen problémát egy logikai axióma okozza. A behelyettesíthetőségre vonatkozó kvantifikációs szabály fordítása a következő:

$$\mathrm{Tr}(\forall b\,\varphi(b)\to\varphi(t/b)) = \boxdot\forall b\,\varphi(b)\to\varphi(t/b).$$

Ennek kontraponáltja világosabban mutatja a problémát:

$$\neg\varphi(t/b)\to\diamonddot\exists b\,\neg\varphi(b).$$

https://doi.org/10.54310/Elpis.2013.1.4

Tehát ha *t*-t (ha létezik, ha nem) jellemez egy (tagadó) kijelentés, akkor már most vagy valamelyik rákövetkező világ létezőjeként jellemzi.

Ennek következménye az, hogy minden individuum, amire referálni lehet, már most vagy a rákövetkező világok egyikében megvalósul – tehát nem lehetségesek soha nem létező individuumok, de még olyanok sem lehetségesek, amelyek csak két, egymás után elvégzett kísérlettel válnak létezővé.

Ez az állítás levezetethetlen *ModSpecRelKin*-ből, nem nehéz egy cáfoló modellt szerkeszteni hozzá. Azonban nem csak levezethetetlen, de önmagában sem plauzibilis; ez az állítás egyedül akkor tűnik természetesnek, ha a kísérletek kompozícióit is kísérleteknek vesszük – tehát ha az alternatívarelációról feltesszük, hogy tranzitív. Ez a következő axiómaséma felvételét jelenti a logikai/keretelméleti axiómák közé:

$$\Diamond\Diamond\varphi \rightarrow \Diamond\varphi.$$

Egy ilyen logikában, habár még mindig nem tétel, de már kevésbé idegen a kérdéses állítás (miszerint ami lehetséges individuum, az előbb-utóbb realizálódik is). Ha azt tekintjük, hogy *SpecRelKin* hogyan kezelte a lehetséges individuumait, semmi meglepő nincs abban, hogy a behelyettesítési szabály fordítása egy ilyen állítás. A *SpecRelKin*-beli tételek szisztematikus tétellé fordítása tehát azzal egyenértékű, hogy ezt az állítást axióma rangjára emeljük-e vagy sem. Erre a kérdésre tekinthetünk úgy is, hogy a modális nyelv kifejezőerejét hozzáigazítjuk-e a klasszikus nyelv (a potencialitást abszolút módon kezelő) kifejezőerejéhez.

Egy jó példa a logikus munkájának illusztrálására az, hogy ezt a kérdést most eldöntetlenül hagyjuk. Feladatunk nem az ilyen dilemmákban való döntéshozatal, hanem az ilyen dilemmák *transzparenssé tétele*.

Folytassuk tehát ott, ahol a klasszikus elmélet vizsgálatát abbahagytuk: a dinamikánál.

3.6. Modális dinamikai axiómák

3.6.1. Megfigyelőküldési axióma

Ahogy azt már a klasszikus esetnél említettük, a megfigyelő-küldés bár kinematikai axióma, nem a kinematika, hanem a dinamika axiomatizálásához szükséges.

AxIObExp: Minden lehetséges megfigyelő tetszőleges irányban és fénynél lassabb sebességgel *képes útnak indítani* egy lehetséges megfigyelőt úgy, hogy annak órája „előre” járjon:

$$(\forall k \in IOb)\forall \bar{x},\bar{y}\begin{pmatrix}\frac{\mathrm{Space}(\bar{x},\bar{y})}{\mathrm{Time}(\bar{x},\bar{y})} < 1\\ \bar{x}_t < \bar{y}_t\end{pmatrix} \rightarrow \Diamond(\exists h \in IOb)\begin{pmatrix}\bar{x},\bar{y} \in \mathrm{wline}_k(h)\\ \mathrm{w}_{kh}(\bar{x})_t \leq \mathrm{w}_{kh}(\bar{y})_t\end{pmatrix}.$$

https://doi.org/10.54310/Elpis.2013.1.4

3.6.2. Definíciók

A modális alapozás ott hálálja meg magát, hogy a klasszikus elméletben bemutatott rugalmatlan ütközés definícióját változtatás nélkül átvehetjük. Bár nem szükséges, további természetes kikötésekkel is élhetünk. Az ott szereplő definíció például ütközésnek nevez olyan pontot is, amelyben bár két életút végződik és egy kezdődik, de akármennyi más életút *áthaladhat* rajta. Ez egy nem modális elméletben természetes, hogy így kell legyen, hiszen *AxPh* végtelen sok létezőt posztulál minden egyes pontba, így az ütközési pontba is. Mi azonban a modális környezetben már boldogulunk ilyen engedmények nélkül is, így szigoríthatunk az ütközés-fogalmon úgy is, hogy az ütközési eseményt legfeljebb három eleműnek szabjuk meg.

De ez csak fogalmi szépítés, a továbbiakban technikailag nem számít majd a két ütközésdefiníció közti különbség. Szükség lesz viszont a következő fogalmakra:

Nem gyorsuló egy test akkor, ha az életútja egy egyenes része. Ezt a következőképpen fejezhetjük ki: az életútjából bármely három pont közül az egyik pontosan a másik kettő között van.

Egy test *t időpillanatban vett helyzete* a *k* megfigyelő szerint:

$$Ib(b) \overset{def.}{\Longleftrightarrow} (\exists k \in IOb)(\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathrm{wline}_k(b))(\bar{x}_t \leq \bar{y}_t \leq \bar{z}_t \rightarrow |\bar{x} - \bar{y}| + |\bar{y} - \bar{z}| = |\bar{x} - \bar{z}|).$$

Két test *tömegközéppontja* egy *t* időpontban az a pont, amely a két test közti távolságot

$$\mathrm{loc}_k(b, t) = \bar{x}_s \overset{def.}{\Longleftrightarrow} W(k, b, x) \wedge \bar{x}_t = t.$$

a tömegük arányában osztja úgy ketté, hogy a nagyobb tömegűhöz van közelebb:

$$\mathrm{cen}_k(b, c, t) \overset{def.}{=} \frac{m_k(b)}{m_k(b) + m_k(c)} \cdot \mathrm{loc}_k(b, t) + \frac{m_k(c)}{m_k(b) + m_k(c)} \cdot \mathrm{loc}_k(c, t).$$

Két test *tömegközépvonala* a tömegközéppontok halmaza:

$$\mathrm{cen}_k(b, c) \overset{def.}{=} \{\mathrm{cen}_k(b, c, t) : t \in Q\}.$$

3.6.3. Tömegközéppont-axióma

A következő axióma olyasmit (annál gyengébbet) fogalmaz meg, mint amit tömegmegmaradás törvényeként ismerünk[26]:

AxCenter: Két nem gyorsuló és rugalmatlanul ütköző test életútja az addigi életútjuk tömegközéppontjának folytatása:[27]

26 Ezek viszonyát Andréka–Madarász–Németi–Székely 2008 illetve Székely 2009, 34–55. o. tárgyalja részletesen.

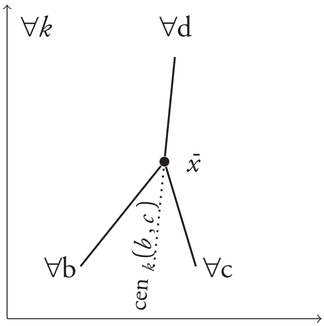
27 Csak úgy, mint az ütközések esetén, létezik a tömegközéppont axiómának többszereplős rugalmatlan ütközésekre kidolgozott verziója: Székely 2009, 34–55. o.

https://doi.org/10.54310/Elpis.2013.1.4

$$(\forall k \in IOb)(\forall b, c, d \in Ib)\ \mathrm{inecoll}\,(b, c : d) \rightarrow$$

$$\rightarrow (\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathrm{cen}_k(b, c) \cup \mathrm{wline}_k(d))(\bar{x}_t \leq \bar{y}_t \leq \bar{z}_t \rightarrow |\bar{x} - \bar{y}| + |\bar{y} - \bar{z}| = |\bar{x} - \bar{z}|).$$

A formulában az áll, hogy a tömegközéppvonal és az életút együtteséből vett tetszőleges három pontból a középső a másik kettő közé esik – azaz a kettő együtt része egy egyenesnek.



3.6.4. Sebességaxióma

A tömegpredikátum relativisztikus tömeget definiál: egy tárgy sosem „*m* tömegű”, hanem „*m* tömegű egy *k* megfigyelő szerint”. Ennek oka természetesen az, hogy csakúgy, mint az egyidejűség, a tömeg is relatív.

Mégis van azonban olyan használata a „tömeg” kifejezésnek, amelyben nem kell név szerint megneveznünk a megfigyelőt, amely a testnek az *m* tömeget tulajdonítja. Akkor mondjuk, hogy egy test *m nyugalmi tömegű*, ha a testet állni látó megfigyelők egyetértenek abban, hogy *m* a tömege. Ahhoz, hogy minden (fénynél lassabb) testnek legyen nyugalmi tömege, érdemes *lehetséges megfigyelőkre* megadni a definíciót, ugyanis aktuális megfigyelők nem mindig vannak:

$$m_0(b) = x \overset{def.}{\iff} \boxdot \begin{pmatrix} (\exists k \in IOb)(\bar{v}_k(b) = \bar{0} \wedge m_k(b) = x) \\ (\forall k \in IOb)(\bar{v}_k(b) = \bar{0} \rightarrow m_k(b) = x) \end{pmatrix}$$

Tehát bizonyos sebesség ($\overline{v}_{\mathrm{k}}(b)$=$\overline{0}$) esetén a relativisztikus tömeg és a sebesség meghatározza a nyugalmi tömeget. Igaz-e ez általában bármilyen sebesség esetén? Egy erre adott, nagyon pontos válasznak tekinthető az ún. *tömegnövekedési tétel*, amely egyben arról is beszámol, hogy az egymáshoz képest mozgó megfigyelők mennyire mérik másként a tömeget. Ennek bizonyításához azonban szükség van arra a feltevésre, amelyet sebesség-axiómának fogunk hívni, és amely szerint a fent említett meghatározás a fordított irányban fennáll, azaz

AxModSpeed: A nyugalmi tömeg és a sebesség meghatározza a relativisztikus tömeget:

$$(\forall k \in IOb)(\forall b, c \in Ib)\begin{pmatrix} m_0(b) = m_0(c) \\ \bar{\mathrm{v}}_k(b) = \bar{\mathrm{v}}_k(c) \end{pmatrix} \rightarrow m_k(b) = m_k(c).$$

3.6.5. *Az ütköztetés axiómája*

Végül pedig szükség lesz ütközésekre, így az utolsó kísérletvégzési axiómával ezeket biztosítjuk:

AxModinecoll: Minden üres téridőpontban tetszőleges nyugalmi tömegű testekkel elvégezhető egy ütköztetési kísérlet:

$$(\forall k \in IOb)(\forall \bar{v}_1, \bar{v}_2 \in Q^3)\forall m_1, m_2, \bar{x} \begin{pmatrix} |\bar{v}_1| < 1 \\ |\bar{v}_2| < 1 \\ m_1 > 0 \\ m_2 > 0 \\ \mathrm{ev}_k(\bar{x}) = \emptyset \end{pmatrix} \rightarrow \Diamond(\exists b, c, d \in Ib) \begin{pmatrix} \mathrm{inecoll}_k(b, c : d) \\ \bar{\mathrm{v}}_k(b) = \bar{v}_1 \\ \bar{\mathrm{v}}_k(c) = \bar{v}_2 \\ m_0(b) = m_1 \\ m_0(c) = m_2 \end{pmatrix}.$$

3.7. A modális dinamika tételei

Modális dinamika alatt a következő, eddig ismertetett elsőrendű modális logikára épített axiómarendszert értjük:

ModSpecRelDyn = *ModSpecRelKin* ∪ { *AxIObExp*, *AxCenter*, *AxSpeed*, *AxModinecoll* }

A már említett tömegnövekedési tétel a következő formula:

$$m_0(b) = \sqrt{1 - \bar{\mathrm{v}}_k(b)^2} \cdot m_k(b).$$

Ez a relativisztikus tömeg, a nyugalmi tömeg és a sebesség kapcsolatát írja le, de egy következménye (és ha *b* fénynél lassabb, ekvivalense) a következő formula:

$$\sqrt{1 - \bar{\mathrm{v}}_k(b)^2} \cdot m_k(b) = \sqrt{1 - \bar{\mathrm{v}}_h(b)^2} \cdot m_h(b).$$

Ez utóbbi képlet talán explicitebb atekintetben, hogy ez a képlet ad számot arról is, hogy az egymáshoz képest mozgó megfigyelők számára hogyan torzulnak el a másik tömeggel kapcsolatos mérései.[28]

28 Ez utóbbi megfogalmazás jól jön akkor is, ha fénynél gyorsabb megfigyelőkre kell hasonló tételt bizonyítani, hiszen azok esetén az első megfogalmazás nem értelmes, mivel nincs nyugalmi tömegük. Egy fénynél gyorsabb testet csak egy fénynél gyorsabb megfigyelő láthat állni, de ilyen megfigyelők létezése ellentmond az eddig axiomatizált kinematikának.

https://doi.org/10.54310/Elpis.2013.1.4

A tömegnövekedési tétel következik *ModSpecRelDyn*-ből – feltéve ha van egy szabad téridőpont, ahol egy ütköztetési gondolatkísérletet végre tudunk hajtani. Azonban ugyanúgy, mint a kinematika esetén, itt is felmerül a következő kérdés: ez még nem biztosítja azt, hogy a párhuzamos, klasszikus *SpecRelDyn*-ben végzett munkálatok általában is megvalósíthatók *ModSpecRelDyn*-ben.

A módszer ugyanaz: pusztán át kell fordítanunk a klasszikus *SpecRelDyn* axiómáit[29] a kérdéses fordítás szerint, és meg kell vizsgálnunk, tételeket kapunk-e. Mivel a dinamika része a kinematika, így egy ilyen fordítás sikerességéhez szintén el kell fogadni a kinematikai fordításhoz szükséges kompromisszumot: amire referálni lehet, azaz ami lehetséges létező, azt mindig egyetlen gondolatkísérlettel is megvalósíthatjuk.

$$\psi(t) \rightarrow \diamond\exists b\, \psi(b).$$

Egy további kompromisszumra is szükség van azonban a dinamika kapcsán. A modális ütköztetési axióma sokkal szigorúbb, mint a klasszikus, így tömegnövekedési tételnél megtett feltevésre is szükség van. Helyre van szükségünk az ütköztetési kísérletek elvégzéséhez.

$$(\exists k \in IOb)\, \exists \bar{x}\, ev_k(\bar{x}) = \emptyset.$$

3.8. Visszafordítás

Világos immár, hogy (megfelelő feltételek mellett) *ModSpecRelDyn* legalább annyit bizonyít, mint a klasszikus *SpecRelDyn*. De képes-e többet bizonyítani, mint *SpecRelDyn*? A módszer ugyanaz, csak most a klasszikus nyelvre fordítjuk a modális formulákat:

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}^-(A) &\overset{def.}{=} A & \mathrm{Tr}^-(\exists x\, \varphi) &\overset{def.}{=} \exists x\, \mathrm{Tr}^-(\varphi) \\ \mathrm{Tr}^-(\neg\varphi) &\overset{def.}{=} \neg\mathrm{Tr}^-(\varphi) & \mathrm{Tr}^-(\exists b\, \varphi) &\overset{def.}{=} \exists b\, \mathrm{Tr}^-(\varphi) \\ \mathrm{Tr}^-(\varphi \rightarrow \psi) &\overset{def.}{=} \mathrm{Tr}^-(\varphi) \rightarrow \mathrm{Tr}^-(\psi) & \mathrm{Tr}^-(\Diamond\varphi) &\overset{def.}{=} \mathrm{Tr}^-(\varphi). \end{aligned}$$

Ez a fordítás tehát azt csinálja, hogy minden modális operátort töröl. Ez lényegében azzal jár, hogy az aktuális kvantifikációt használó nyelvet potenciális kvantifikációt használó nyelvvé alakítja – és igazából ez a cél a *ModSpecRelDyn* és *SpecRelDyn* közti kapcsolat létrehozásához.

Kinematika kapcsán működik a megfeleltetés – még az univerzális behelyettesítés erősebb szabálya is levezethető a klasszikus logikai környezetben. Tehát min-

29 Az axiómák megtalálhatók Andréka–Madarász–Németi–Székely 2008-ban.

https://doi.org/10.54310/Elpis.2013.1.4

den *ModSpecRelKin*-beli tétel modalitás-mentes változata *SpecRelKin*-beli tétel. De a dinamika kapcsán sajnos vagy szerencsére nem vagyunk ebben a helyzetben. Az *AxModinecoll* fordítása nagyon szigorú. Sajnálatos módon alkalmazhatatlan, mivel a klasszikus kinematika minden pontba megfigyelőket (*AxIObExp*) és fotonokat (*AxPh*) posztulál, így „nincs hely" az alkalmazására. Ha úgy tetszik, *AxModinecoll* fordítása egy azonosan hamis előtagú kondicionális formula, így az a klasszikus logika szabályai szerint egy azonosan igaz formula. Mivel minden más rendben a megfelelő tételbe fordítódik,

$$\mathrm{Tr}^{-}(\mathit{ModSpecRelDyn}) \vdash \varphi \Longrightarrow \mathit{SpecRelDyn} - \{\mathrm{Ax}\forall\mathrm{inecoll}\} \vdash \varphi\,.$$

Itt *Ax∀inecoll* az az (általunk messze elkerült) axióma, amely (egy különös, aktualitást és potencialitást összekeverő ütközésfogalommal dolgozva, de) azt állítja, hogy minden ütközés megvalósul valahol a téridőben.[30]

Tehát úgy tűnik a klasszikus nyelvre történő fordítás alapján, hogy *ModSpecRelDyn* a klasszikus változatához képest szerényebb premisszákkal dolgozó elmélet – ez pedig a logikában egy igen kedvező tulajdonság.

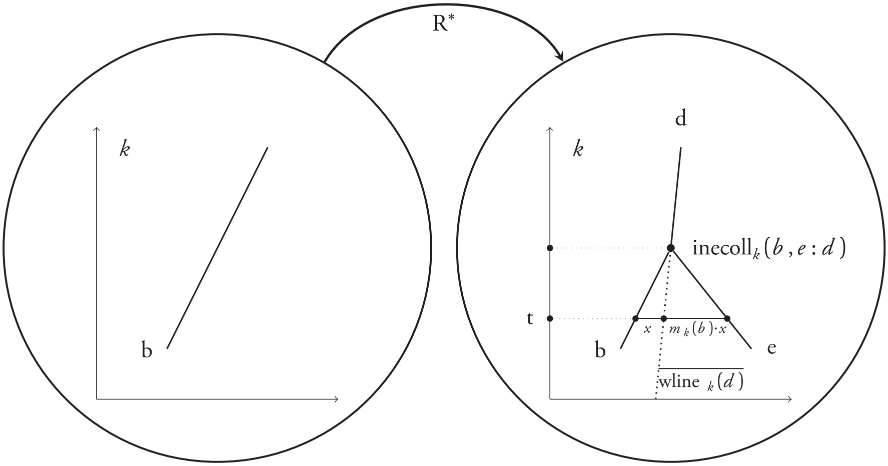
4. Operacionalitás

Az előző szakaszban bemutattuk, hogyan lehet a gondolatkísérletek egy nagyon kis csoportjával axiomatikus módon számot adni a speciális relativitáselméletről. Ebben a fejezetben abba nyújtunk betekintést, hogyan lehetne gondolatkísérletek egy bővebb körével úgy számot adni a speciális relativitáselméletről, hogy nem tesszük fel azt, hogy minden test rendelkezik valamilyen tömeggel. Filozófiai megfogalmazásban: felhagyunk azzal, hogy a tömeget a tárgyak egy (bár minden megfigyelő számára más, de) intrinzikus, esszenciális jellemzőjének tekintsük.

A tömeg operacionális definíciója arra hivatott, hogy a tömeget a testek ütközésekben való *viselkedése* alapján határozza meg. Ehhez célszerű kitüntetnünk bizonyos testeket, az ún. *etalonokat*, amelyekhez mérünk. A tömeg az operacionális felfogásban tehát egy arány, amely azt jellemzi, hogy egy etalonnal való ütközés után hogyan változna meg a test életútja. Tehát annál nagyobb tömegűnek mondunk egy testet, minél kevésbé befolyásolná a pályáját egy etalonnal való ütközés. E koncepciót a következő illusztrációval és a formulával vázoljuk:

30 Arról ez az axióma nem szól, hogy hol, pusztán azt állítja, hogy valahol megvalósul. A modális változat egyik igen pozitív hozadéka az, hogy a klasszikus változattal szemben megengedi az ütközés helyének kiválasztását, ha az üres.

https://doi.org/10.54310/Elpis.2013.1.4



$$m_k(b) \overset{def.}{=} \begin{cases} 1, \text{ ha } b \in E_k \\ m, \text{ ha } \Diamond(\exists e \in E_k)(\exists d \in B)[\text{inecoll}_k(b, e:d) \wedge \\ \quad (\exists t < \text{inecoll}_k(b, e:d)_t)\, m = \frac{|\text{loc}_k(e,t) - \overline{\text{wline}_k}(d,t)|}{|\text{loc}_k(b,t) - \overline{\text{wline}_k}(d,t)|}\Big] \end{cases}.$$

Itt $E(k,b)$ primitív predikátum: b egy nem gyorsuló *etalonteste* a k megfigyelőnek, a felülvont $\text{wline}_k(d)$ pedig a d nem gyorsuló test életútját lefedő egyenes, t-vel kiegészítve pedig az egyenes a t időpillanatban vett térbeli helyzetét jelenti.

A modális operátor és az R^* valamilyen alternatívarelációra utal. Olyan gondolatkísérlet-fogalomról van azonban szó, amilyenre eleddig nem támaszkodtunk, ez ugyanis nem tiltja W extenziójának megváltozását: b test világvonala az ábra alapján *megváltozott* az e etalontest becsapódása után.

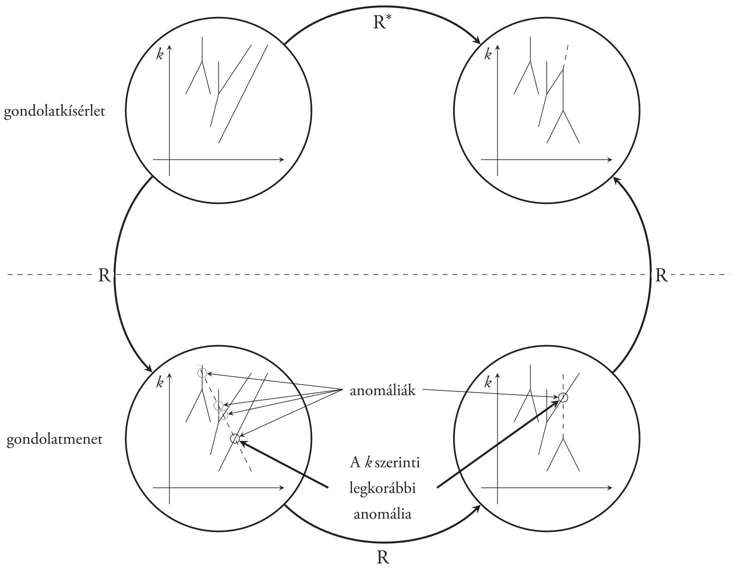
Kérdés tehát, hogyan lazítsunk az eddig használt

$$\forall k\, b\, \bar{x} \quad W(k, b, \bar{x}) \;\rightarrow\; \Box W(k, b, \bar{x})$$
$$\forall k\, b\, \bar{x}\; \neg W(k, b, \bar{x}) \;\rightarrow\; \Box\neg W(k, b, \bar{x})$$

axiómákon úgy, hogy továbbra is világos legyen, hogyan változhatnak a világvonalak, amikor az egyik lehetséges világból a másikba lépünk az alternatívareláció mentén?

Az elv a következő: kis lépésekre bontjuk a gondolatkísérleteket. Ezeket nem kell feltétlenül gondolatkísérleteknek tekinteni, mivel nem reális helyzetekkel is operálnak. A kis lépések közben könnyen lehet majd, hogy két test ütközés nélkül halad át egymáson. A lépések során a feladat az, hogy az ilyen anomáliákat elimináljuk, azaz ütközésekre cseréljük. Ezt a koncepciót illusztrálja a következő ábra:

https://doi.org/10.54310/Elpis.2013.1.4



A kisebb lépések (R) axiomatizálása, avagy kiválasztása a következőképpen történik. Ha egy anomália (két világvonal ütközés nélküli átfedése) történik valahol a téridőben, akkor

- Kiválasztunk egy megfigyelőt, a továbbiakban ennek a megfigyelőnek a világképével dolgozunk.
- Tekintsük ekkor azt a téridőt alternatívának, ahol
  - az első anomáliában *nem* résztvevő testek életútja megőrződik,
  - az első anomáliában résztvevő testek életútja
    - törlésre kerül, ha később észlelte őket a megfigyelő, mint az első anomáliát,
    - megőrződik, ha nem később észlelte őket a megfigyelő, mint az első anomáliát.
- Létezik egy test, amelynek életútja onnan kezdődik, ahol az első anomália volt.
- Ezen az új testen kívül nincs új létező.

Az itt leírt anomália-eltüntető algoritmus (bár nem triviális módon, de) modális elsőrendben is megfogalmazható, és így axiomatizálható. Erre támaszkodva már kijelölhetők a gondolatkísérletek is: gondolatkísérlettel elérhetőek azok az alternatívarelációkkal elérhető világok, amelyekben nincs anomália.

Lényegében ez a koncepció alkotja a jelenlegi kutatásaink vázát: Egy olyan teljességi tétellel bíró modális logikát keresünk, amely az említett algoritmus alapján képes az ütközéseket megvalósítani, és amellyel definiálható egy gondolatkísérleteket modellező kompozit alternatívareláció.

https://doi.org/10.54310/Elpis.2013.1.4

5. Összegzés

A speciális relativitáselmélet axiomatizálását véghez lehet vinni tehát úgy is, hogy az informális kommentárokban gyakran használt gondolatkísérletek is expliciten részei lehessenek az axiómarendszernek. Ehhez mindössze egy egyszerű elsőrendű modális logikára van szükség. Ennek használatával a klasszikus dinamikai axiómarendszernél fellelhető, aktualitással és potencialitással kapcsolatos problémák szépen feloldhatók.

Mindemellett az aktuális és potencialitás megkülönböztetése miatt ontológiai szempontból is elegánsabb elméletnek tűnik: *ModSpecRelDyn*-ből nem következik egyetlen test aktuális létezése sem, de aktuális testek létezését állító premisszákból igenis képes ezen testekről szóló tulajdonságokat bizonyítani. Tehát *ModSpecRelDyn*-ben már a *tárgyelméletben*, a formulák szintjén világossá tehető, mely entitások léte mellett kell elköteleződni és melyek szolgálnak pusztán számolásra. A számok mellett ilyenek például az *AxPhExp*, *AxIObExp* és *AxModinecoll* által biztosított fotonok, megfigyelők és ütközések. Ezzel az axiómarendszerrel a háttérben azt mondhatjuk, hogy egy Γ dinamikai elmélet akkor kötelezi el magát egy t terminus mellett ontológiailag, ha

$$\mathit{ModSpecRelDyn} \cup \Gamma \vdash \exists b \; b = t\,.$$

Bemutattuk azt is, hogy a modális axiómarendszer jól közelíthető a klasszikussal:

$$\begin{array}{lcl} \mathit{SpecRelDyn} \vdash \varphi & \Longrightarrow & \mathit{ModSpecRelDyn} \vdash \mathrm{Tr}(\varphi)\,, \\ \mathit{SpecRelDyn} - \{\mathit{Ax}\forall\mathit{inecoll}\} \vdash \mathrm{Tr}^{-}(\varphi) & \Longleftarrow & \mathit{ModSpecRelDyn} \vdash \varphi \end{array}$$

ahol a két fordítás valóban „hű": a lehetséges individuumok feletti kvantifikációt lehetséges individuumok feletti kvantifikációra fordítják, ennek fényében pedig e két eredmény azt fejezi ki, hogy a két elmélet a lehetséges individuumokról hasonlóképpen számol be.

Végül pedig bemutattuk, hogy a gondolatkísérletek körének bővítésével merre lehetne elindulni, hogy a tömeg operacionális definícióval legyen megfogalmazható. Ez arról is árulkodik, hogy a modális logika alkalmazása olyan tudományfilozófiai kérdések formális kezelését teszi lehetővé, amely klasszikus keretek közt elképzelhetetlen.

https://doi.org/10.54310/Elpis.2013.1.4

Bibliográfia

Andréka Hajnal – Madarász X. Judit – Németi István 2002, *On the logical structure of relativity theories* (preprint). Preprints of the Algebraic Logic Department, [http://www.math-inst.hu/pub/algebraic-logic/Contents.html] (2012.10.30.).

Andréka Hajnal – Madarász X. Judit – Németi István 2007, „Logic of Space-Time and Relativity Theory." In M. Aiello–I. Pratt-Hartman–J. van Benthem (szerk.), *Handbook of Spatial Logics*. Springer, Dordrecht, 607–711. o. [http://www.math-inst.hu/pub/algebraic-logic/Logicofspacetime.pdf](2012.10.30.)

Andréka Hajnal – Madarász X. Judit – Németi István – Székely Gergely 2008, „Axiomatizing relativistic dynamics without conservation postulates." *Studia Logica* 89 No. 2, 163–186. o. [http://arxiv.org/abs/0801.4870] (2012.10.30.).

Andréka Hajnal – Madarász X. Judit – Németi István – Székely Gergely 2010, „On Logical Analysis of Relativity Theories." *Magyar Filozófiai Szemle*. 2010/4, 54. 204–223. o. [http://arxiv.org/abs/1105.0885] (2012.10.30.).

Andréka Hajnal – Madarász X. Judit – Németi István – Székely Gergely 2012, „What are the numbers in which spacetime?" *ArXiv*, Cornell University Library, [http://arxiv.org/abs/1204.1350] (2012.10.30.).

Benda, Thomas 2008, „A Formal Construction of a Spacetime Theory." *Journal of Philosophical Logic* 37, 441–478. o.

Corsi, Giovanna 2002 „A Unified Completeness Theorem for Quantified Modal Logics." *The Journal of Symbolic Logic* 67, No. 4, 1483–1510. o., [http://www.jstor.org/stable/3648583] (2012.10.30.).

Goldblatt, Robert 1987, *Orthogonality and Space-time Geometry*. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg.

Gyenis Balázs 2012, „What is physically possible?" (prezentáció). *First International Conference on Logic and Relativity.* [http://www.renyi.hu/conferences/nemeti70/LR12Talks/gyenis.pdf]

Madarász X. Judit – Németi István – Székely Gergely 2006, „First-Order Logic Foundation of Relativity Theories." In D. Gabbay–S. Goncharov–M. Zakharyaschev (szerk.), *Mathematical Problems from Applied Logic. Logics for the XXIst Century. II.* International Mathematical Series, 5, Springer 217–252. o., [http://arxiv.org/abs/gr-qc/0604041] (2012.10.30.).

Madarász X. Judit – Németi István – Székely Gergely 2012, „What are the numbers in which spacetime?" *ArXiv*, Cornell University Library, [http://arxiv.org/abs/1204.1350] (2012.10.30.).

Madarász X. Judit – Székely Gergely 2011, „Comparing Relativistic and Newtonian Dynamics in First-Order Logic" In Máté A.–Rédei M.–Stadler F. (szerk.), *The Vienna Circle in Hungary* Springer-Verlag, Wien, 2011, 155–179. o., [http://www.renyi.hu/~turms/papers/di.pdf] (2012.10.30.).

Madarász X. Judit – Székely Gergely 2012, „Do faster than light particles violate special relativity?" (prezentáció). *First International Conference on Logic and Relativity.* [http://www.renyi.hu/conferences/nemeti70/LR12Talks/madarasz-szekely.pdf]

Ruzsa Imre 1988, *Logikai szintaxis és szemantika*. Akadémiai kiadó, Budapest.

https://doi.org/10.54310/Elpis.2013.1.4

Székely Gergely 2009, *First-Order Logic Investigation of Relativity Theory with an Emphasis on Accelerated Observers* (disszertáció). ELTE University, [http://www.renyi.hu/~turms/phd.pdf] (2012.10.30.).

Székely Gergely 2011, „On Why-Questions in Physics." In Máté A.–Rédei M.–Stadler F. (szerk.), *The Vienna Circle in Hungary* Springer-Verlag, Wien, 2011, 181–189. o., [http://arxiv.org/abs/1101.4281] (2012.10.30.).

Székely Gergely 2012, „The existence of superluminal particles is consistent with the kinematics of Einstein's special theory of relativity". *ArXiv*, Cornell University Library, [http://arxiv.org/abs/1202.5790] (2012.10.30.).

https://doi.org/10.54310/Elpis.2013.1.4